10^{o} ΜΑΘΗΜΑ

2.14. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.14.1. Συνέχεια συνάρτησης στο x_0

Ορισμός: **Μια συνάρτηση f/A ονομάζεται συνεχής στο σημείο** $x_o \in A$**, όταν υπάρχει το** $\lim_{x\to x_o} f(x)$ **και είναι:**

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ **να ισχύει:**

$$0 < |x - x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Τότε η συνάρτηση f/A είναι συνεχής στο $x_o \in A$**.**

Παρατήρηση: **Για να έχουμε συνέχεια της f στο x_0, πρέπει:**

i. **Να είναι απαραίτητα** $x_o \in A$

ii. **Να υπάρχει το** $\lim_{x\to x_o} f(x)$**. Αυτό σημαίνει ότι:**

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x)$$

iii. **Να είναι** $\lim_{x\to x_o} f(x) \neq \pm\infty$

2.14.2. Συνεχείς συναρτήσεις στο $\Delta \subseteq A$

Μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta \subseteq A$, όταν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o) \quad \forall x_o \in \Delta$$

Δηλαδή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του **Δ.**

Τέτοιες συναρτήσεις είναι:

1. **Σταθερές.**
2. **Ταυτοτικές.**
3. **Πολυωνυμικές.**
4. **Ρητές.**
5. **Άρρητες.**
6. **Τριγωνομετρικές**
7. **Εκθετικές.**
8. **Λογαριθμικές.**
9. **Η αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης**

2.14.3. Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις **f, g** είναι συνεχείς στο $x_o \in \Delta$ ή σε ολόκληρο το **Δ**, τότε θα είναι επίσης συνεχείς στο $\mathbf{x_o}$ ή στο **Δ** και οι παρακάτω συναρτήσεις:

1. $f \pm g$ **2.** $f \cdot g$ **3.** $\kappa f,\ \lambda g$

4. $f^{\kappa},\ g^{\lambda}$ **5.** $\frac{1}{f},\ \frac{1}{g}\quad f,g \neq 0$ **6.** $\frac{f}{g},\ \frac{g}{f}\quad f,g \neq 0$

7. $\sqrt[\kappa]{f},\ \sqrt[\lambda]{g}\quad f,g \geq 0\quad \kappa,\lambda \in \mathbb{N}^*$ **8.** $|f|,\ |g|$

9. $f \circ g$ **και** $g \circ f$

2.14.4. Θεωρήματα συνέχειας

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO</u>	<u>ΘΕΩΡ. ΕΝΔΙΑΜ. ΤΙΜΗΣ</u>	<u>ΘΕΩΡ. ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ</u>
Αν η συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο **[α,β]** και $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, ώστε να ισχύει $\mathbf{f(\xi) = 0}$. Δηλαδή η συνάρτηση **f** έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **(α,β).**	Αν η συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο **[α,β]** και $\boldsymbol{\kappa \in (f(\alpha),f(\beta))}$ ή $\boldsymbol{\kappa \in (f(\beta),f(\alpha))}$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $\mathbf{f(\xi) = \kappa}$ Δηλαδή το σύνολο τιμών της **f/[α,β]** είναι το **f(A)=[m,M]**	Αν η συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο **[α,β]**, τότε υπάρχουν υποχρεωτικά δυο τιμές $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει: $\mathbf{f(\xi_1) \leq f(\chi) \leq f(\xi_2)}$ $\forall \chi \in [\alpha,\beta]$ Προφανώς είναι: $\mathbf{Min(f)=f(\xi_1)=m}$ $\mathbf{Max(f)=f(\xi_2)=M}$ Δηλαδή υπάρχουν ολικά **ΑΚΡΟΤΑΤΑ**

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr

2.15. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ NEWTON

Από την γνωστή ταυτότητα (ΔΙΩΝΥΜΟ Νεύτωνα):

$$\alpha^{\kappa}-\beta^{\kappa}=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\kappa-1}+\alpha^{\kappa-2}\beta+\alpha^{\kappa-3}\beta^{2}+\ldots+\beta^{\kappa-1}\right)\quad \forall\kappa\in\mathbb{N}^{*}$$

έχω:

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^{\kappa}-\beta^{\kappa}}{\alpha^{\kappa-1}+\ldots+\beta^{\kappa-1}}$$

Θέτω $\alpha=\sqrt[\kappa]{x}$, $\beta=\sqrt[\kappa]{y}$ με $x,y>0$ και έχω:

$$\boxed{\sqrt[\kappa]{x}-\sqrt[\kappa]{y}=\frac{x-y}{\underbrace{\sqrt[\kappa]{x^{\kappa-1}}+\sqrt[\kappa]{x^{\kappa-2}y}+\ldots+\sqrt[\kappa]{y^{\kappa-1}}}_{\kappa\ \text{όροι}}}\,,\quad \kappa\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}}$$

Από τη σχέση αυτή, μπορούμε να έχουμε χρήσιμους τύπους, που βοηθούν στους μετασχηματισμούς. Έτσι λοιπόν, έχω:

* Για **κ=2.** $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

* Για **κ=3** $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^{2}}}$

* Για **κ=4** $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt[4]{x^{3}}+\sqrt[4]{x^{2}y}+\sqrt[4]{xy^{2}}+\sqrt[4]{y^{3}}}$

* Για **κ=5** $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt[5]{x^{4}}+\sqrt[5]{x^{3}y}+\sqrt[5]{x^{2}y^{2}}+\sqrt[5]{xy^{3}}+\sqrt[5]{y^{4}}}$

… … …

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

- Αν $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2} = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[8]{x^8} = \ldots = |x|$
- Αν $x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2} = -\sqrt[4]{x^4} = -\sqrt[6]{x^6} = -\sqrt[8]{x^8} = \ldots = -|x|$
- Αν $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[5]{x^5} = \sqrt[7]{x^7} = \ldots = |x|$
- Αν $x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{(-x)^3} = -\sqrt[5]{(-x)^5} = -\sqrt[7]{(-x)^7} = \ldots = -|x|$

2.16. ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

2.16.1 Ορισμοί

Όταν: $x \to +\infty$

Θα λέμε ότι η f / A **έχει:**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x > \kappa$ **να ισχύει:**

$$f(x) > M \quad \forall\ M > 0$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x > \kappa$ **να ισχύει:**

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x > \kappa$ **να ισχύει:**

$$f(x) < -M \quad \forall\ M > 0$$

Όταν: $x \to -\infty$

Θα λέμε ότι η f / A **έχει:**

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x < -\kappa$ **να ισχύει:**

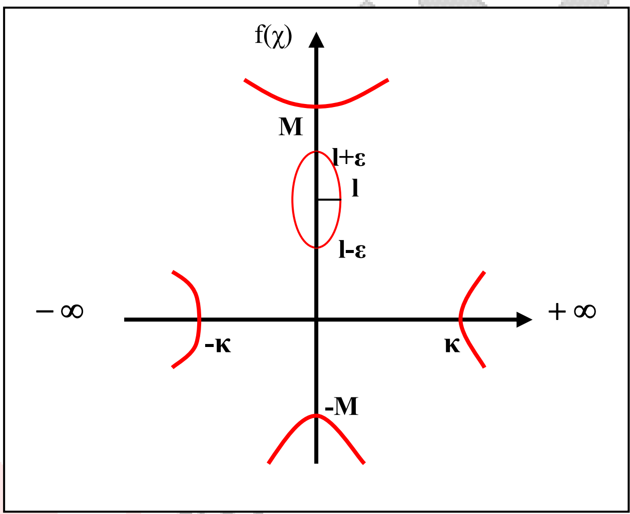
$$f(x) > M \qquad \forall\ M > 0$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x < -\kappa$ **να ισχύει:**

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, **όταν υπάρχει** $\kappa > 0$**, ώστε με** $x < -\kappa$ **να ισχύει:**

$$f(x) < -M \qquad \forall\ M > 0$$



ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΑΘΗΤΩΝ

ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$ επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$

Διότι: $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ ή $\dfrac{-1}{x}\ge\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\ge\dfrac{1}{x}$, ενώ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\pm\dfrac{1}{x}\right)=0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\lambda}=+\infty$ με $\lambda\in\mathbb{N}^*$, ενώ ακόμα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\lambda}}=0$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\lambda}=\begin{cases}+\infty & \lambda=\text{άρτιος}\\ -\infty & \lambda=\text{περιττος}\end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{\lambda}}=0$, $\lambda\in\mathbb{N}^*$

4. Αν η $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_o\,/\,\mathbb{R}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, ισχύει:

$$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\alpha_\nu\lim_{x\to\pm\infty}x^\nu$$

Δηλαδή το όριο της πολυωνυμικής συνάρτησης, είναι το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.

5. Αν η $f(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_o}{\beta_\mu x^\mu+\ldots+\beta_o}$ είναι ρητή συνάρτηση, ισχύει:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\right)\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-\mu}$$

6. Κάθε πολυωνυμική περιττού βαθμού συνάρτηση, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

7. Ισχύουν οι ιδιότητες τω συγκλινουσών και των ορίων.

8. Ισχύουν οι πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$. (**Μνημονικοί κανόνες**)

2.16.2. Τρόποι άρσης της αοριστίας

I. $\frac{0}{0}$: Κάνω παραγοντοποίηση και απλοποίηση.

II. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$: Βγάζω κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο.

III. $0.\infty$: Πολλαπλασιάζω με τον συζυγή ή Newton.

IV. $\infty-\infty$: Βγάζω κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο.

V. $\frac{\alpha}{0}$ ή $\frac{\infty}{0}$: Εξετάζω την συνάρτηση $f(x)$, αν $f(x)>0$ ή $f(x)<0$.

Συνήθως με πλευρικά.

VI. Αν έχω άρρητες και προκύπτει αοριστία, τότε χρησιμοποιώ Newton ή κάνω προσθαφαίρεση του κατάλληλου αριθμού $\alpha>0$ ή $x, x^2, x^3,\dots$

2.17. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΙΩΝ

Παρατηρώ ότι ισχύουν:

$$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\} \Rightarrow |\eta\mu x|<|x|<|\varepsilon\varphi x|$$

και

$$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow |\eta\mu x|\le|x|$$

Συνέπεια αυτών, έχω:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to0}\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}\neq1,\quad \alpha\neq0} \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0}$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot ημ\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{ημy}{y}=1$$

Δεδομένου ότι όταν $x\to\infty$, τότε $\underset{x\to\infty}{y}\to\frac{1}{\infty}\to 0$.

Έτσι λοιπόν, έχω:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot ημ\frac{1}{x}=1}$$

Ενώ:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ημ\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{ημy}{y}=0$$

διότι όταν $x\to 0$, έχω $y=\frac{1}{x}\to\pm\infty$. Επομένως:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\cdot ημ\frac{1}{x}=0}$$

Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-συνx}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-συνx)(1+συνx)}{x^2(1+συνx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-συν^2x}{x^2(1+συνx)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+συνx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+συνx}\right)=$$

$$=1^2.\frac{1}{1+συν0}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Επομένως έχω:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-συνx}{x^2}\right)=\frac{1}{2}}$$

Στον ίδιο τύπο μπορώ να καταλήξω, αν θέσω: $1-συνx=2ημ^2\frac{x}{2}$

Ακόμη, παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2=1^2=1$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx^2}{x^2}\overset{x^2=y}{=}\lim_{y\to 0}\left(\frac{ημy}{y}\right)=1$$

Ενώ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$$

Προσοχή: **Δεν υπάρχουν τα:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\eta\mu x),\quad \lim_{x\to\pm\infty}(\sigma\upsilon\nu x),\quad \lim_{x\to\pm\infty}(\varepsilon\varphi x)$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ
ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ	
$\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu\alpha=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ $=1-2\eta\mu^2\alpha$ $=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$	$\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1$ $=1-2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$ $=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$
$\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$

ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ	
$1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$1+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$
$1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\eta\mu^2\alpha$	$1-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$
$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\varphi^2\alpha$	$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}$
$\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1\Rightarrow\begin{cases}1-\sigma\upsilon\nu^2\chi=\eta\mu^2\chi\\1-\eta\mu^2\chi=\sigma\upsilon\nu^2\chi\end{cases}$	
$1+\varepsilon\varphi^2\chi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	$1+\sigma\varphi^2\chi=\frac{1}{\eta\mu^2\chi}$

Αθροίσματα σε γινόμενα	**Γινόμενα σε αθροίσματα**
$ημA+ημB=2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$	$2ημα.συνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β)$
$ημA-ημB=2ημ\frac{A-B}{2}συν\frac{A+B}{2}$	$2συνα.ημβ=ημ(α+β)-ημ(α-β)$
$συνA+συνB=2συν\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$	$2συνα.συνβ=συν(α-β)+συν(α-β)$
$συνA-συνB=2ημ\frac{A+B}{2}ημ\frac{B-A}{2}$	$2ημα.ημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$

2.18 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Bolzano

Α. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια **εξίσωση** έχει **μια τουλάχιστον** ρίζα σε ένα διάστημα $(α,β)$. τότε κάνουμε τα εξής:

① **Μεταφέρουμε όλους** τους όρους στο **α΄** μέλος και κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν είναι κλασματικοί.

② **Θέτουμε** $g(x)$ το **α΄** μέλος. Δηλαδή η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x)=0$.

③ **Δείχνουμε** ότι η **g** είναι **συνεχής** στο διάστημα $[α,β]$.

④ **Δείχνουμε** ότι $g(α)\cdot g(β)<0$

Εφ’ όσον ισχύουν τα βήματα ③ και ④ για τη **g,** ισχύει το θ. Bolzano, επομένως υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(α,β)$ η οποία επαληθεύει την $g(x)=0$, άρα κα την αρχική, με την οποία είναι ισοδύναμη.

Σημείωση 1η:

> Όταν η εκφώνηση δεν δίνει διάστημα $[α,β]$, τότε το βρίσκουμε μόνοι μας, με δοκιμές ή δείχνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x)>0$ και $\lim_{x\to-\infty} g(x)<0$ ή αντίστροφα, όταν $g(x)/\mathbb{R}$.

Σημείωση 2η:

Όταν η εκφώνηση ζητά να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **μοναδική** ρίζα σε ένα διάστημα (α,β), τότε δείχνουμε ότι η **g** είναι **γνησίως μονότονη**, ή χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο.

Β. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια **σχέση** της μορφής $g(x)=f(x)$ ισχύει για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$, κάνουμε τα εξής:

❶ Θέτουμε: $h(x)=g(x)-f(x)$

❷ Δείχνουμε ότι η **h** είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

❸ Δείχνουμε ότι: $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$

Με τις προϋποθέσεις αυτές, ισχύει το θ. Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{h(\xi)=0 \quad\Rightarrow\quad g(\xi)-f(\xi)=0 \quad\Rightarrow\quad g(\xi)=f(\xi)}$$

Άρα η πρόταση ισχύει.