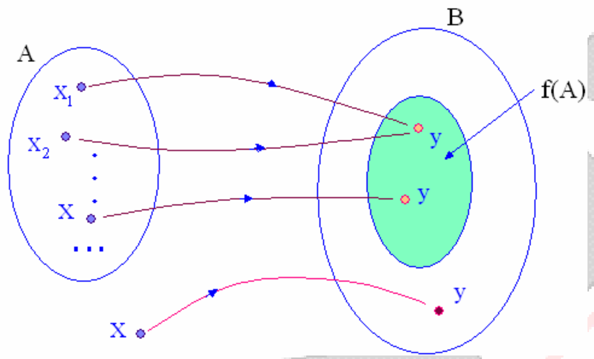
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

8^{o} ΜΑΘΗΜΑ

2.7.1 Σύνολο τιμών f(A) της f / A ⇒ B



<u>Ορισμός:</u> **Το σύνολο τιμών της συνάρτησης** $f / A \to B$ **περιλαμβάνει εκείνα τα** $y \in B$ **για τα οποία υπάρχει** $x \in A$**:**

«Η εξίσωση $y = f(x)$ **να έχει λύση ως προς** x**»**

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, συμβολίζεται με $f(A)$**.**

Δεν περιλαμβάνει εκείνα τα $y \in B$ για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση για $x \notin A$.

> Άρα για να βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης $f / A \to B$ λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ με άγνωστο το x και θέτουμε όλους τους **κατάλληλους** περιορισμούς για το $y \in B$ ώστε το $x \in A$. Το σύνολο των περιορισμών που θέτουμε για το y δίνει το ζητούμενο $f(A)$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> **Αν υποτεθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο:**

$$f(x) = 2x + 3 \ / \ A$$

έχει πεδίο ορισμού $A = [-1, 5]$**, να βρείτε το** $f(A)$**.**

Λύση: Θέτω $f(x)=y$, δηλαδή $y=2x+3$ και λύνω ως προς x, που είναι:

$$x=\frac{y-3}{2}$$

Επειδή ισχύει $-1\le x\le 5$, έχουμε:

$$-1\le \frac{y-3}{2}\le 5 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le y-3\le 10 \quad\Leftrightarrow\quad 1\le y\le 13$$

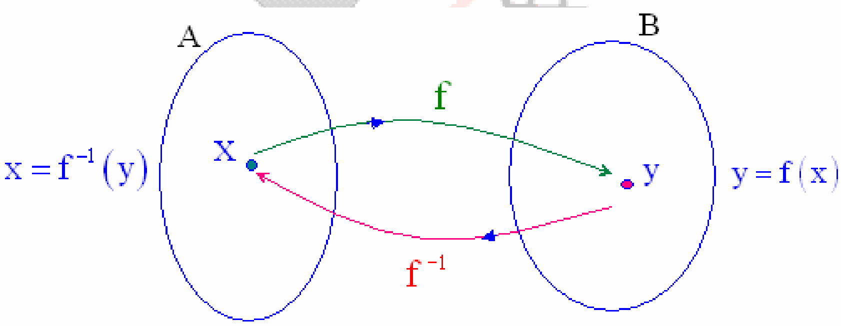
Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης, είναι:

$$\boxed{f(A)=[1,\ 13]}$$

Σημείωση: Οι τιμές **1** και **13** ονομάζονται **ολικά ακρότατα** της **f.** μάλιστα είναι:

$$\boxed{\min(f(x))=1} \quad \text{και} \quad \boxed{\max(f(x))=13}$$

2.7.2. Αντίστροφη συνάρτηση της $f/A\Rightarrow B$



Ορισμός: **Αντίστροφη της συνάρτησης** $f/A\to B$ **είναι η απεικόνιση του συνόλου B στο σύνολο A, ώστε αν** $x\in A$ **και υπάρχει** $y\in B$ **:**

$$y=f(x)$$

τότε με $y\in B$ **υπάρχει** $x\in A$ **:**

$$x=f^{-1}(y)$$

Παρατηρήσεις:

① Η συνάρτηση $f/A\to B$ **αντιστρέφεται**, δηλαδή έχει αντίστροφη, μόνο αν είναι **«1-1»**

② Αν η συνάρτηση $f/A\to B$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}/B\to A$ τότε προφανώς είναι $B=f(A)$, που σημαίνει **ότι το πεδίο ορισμού της μιας είναι σύνολο τιμών της άλλης.**

③ Ο τύπος της αντίστροφης $f^{-1}(x)$ βρίσκεται αν **η σχέση** $y=f(x)$ **λυθεί ως προς χ** (διότι $x=f^{-1}(y)$). Συνήθως **αλλάζουμε** μετά τους αγνώστους x,y μεταξύ τους.

④ Προφανώς ισχύει:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1}=f}$$

⑤ Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $f^{-1}(x)$ αν γίνουν στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι **συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης, τρίτης γωνίας των αξόνων**. Δηλαδή είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$.

⑥ Η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι **ισοδύναμη** με την εξίσωση $f(x)=x$ **μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα**. Αυτό συμβαίνει, λόγω της συμμετρίας αυτής ως προς τη διχοτόμο ($y=x$) που έχει ως συνέπεια να ισχύει:

$$\boxed{f^{-1}(x)=f(x)=x=y}$$

Παραδείγματα συνόλου τιμών – αντίστροφης

1. **Αν** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}/A=[2,3)$, **να βρείτε το** $f(A)$.

Λύση: Θέτω $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (1) με $2\le x<3$. Την εξίσωση αυτή λύνουμε ως προς x και έχουμε:

$$(1)\ \Leftrightarrow\ y(x-1)=2x+1\ \Leftrightarrow\ yx-2x=y+1\ \Leftrightarrow\ \boxed{(y-2)x=y+1}\ (2)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $y \neq 2$ διότι στην αντίθετη περίπτωση, έχουμε $(2-2)x = 2+1$ δηλαδή $0 = 3$, που είναι αδύνατο. Επειδή λοιπόν είναι $y \neq 2$, ισοδύναμα της (2), έχουμε:

$$\boxed{x = \frac{y+1}{y-2}}$$

Δεδομένου ότι από το πεδίο ορισμού ισχύει $2 \leq x < 3$ έχουμε:

$$2 \leq \frac{y+1}{y-2} < 3 \quad \text{με} \quad y \neq 2$$

Είναι προφανές ότι οι λύσεις της προηγούμενης ανίσωσης είναι οι κοινές λύσεις των:

$$2 \leq \frac{y+1}{y-2} \ (3) \quad \text{και} \quad \frac{y+1}{y-2} < 3 \ (4)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(3) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{y+1}{y-2} - 2 \Leftrightarrow \frac{y+1-2y+4}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-y+5}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(-y+5)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2 < y \leq 5} \quad (5)$$

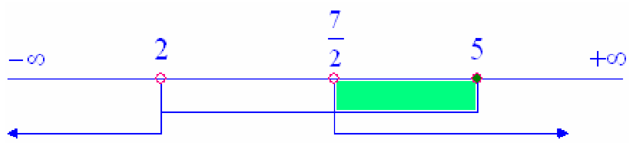
Ακόμη έχουμε:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{y+1-3y+6}{y-2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2y+7}{y-2} < 0 \Leftrightarrow (-2y+7)(y-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y < 2 \quad \text{ή} \quad \frac{7}{2} < y} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) και με την βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών:



Προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης, είναι:

$$\boxed{f(A)=\left(\frac{7}{2},5\right]}$$

Προφανώς είναι $\max f(x)=5$, ενώ δεν υπάρχει **ελάχιστη τιμή,** γιατί το πεδίο τιμών από αριστερά είναι ανοικτό.

2. Αν η συνάρτηση f / A έχει τύπο:

$$f(x)=\frac{2x-1}{5}$$

με $A=\left[\frac{1}{2},\quad 4\right]$**, να λυθεί η εξίσωση:**

$$f^{-1}(x)=f(x)$$

__Λύση:__ Η f είναι **«1-1»,** διότι όταν $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε:

$$\frac{2x_1-1}{5}=\frac{2x_2-1}{5} \Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η **f** αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε:

$$y=\frac{2x-1}{5} \Rightarrow 2x=5y+1 \Rightarrow x=\frac{5y+1}{2}$$

Επειδή είναι $\frac{1}{2}\le x\le 4$, συνεπάγεται:

$$\frac{1}{2}\le\frac{5y+1}{2}\le 4 \Leftrightarrow 1\le 5y+1\le 8 \Leftrightarrow 0\le y\le\frac{7}{5}$$

Επομένως έχω:

$$\boxed{f^{-1}(y)=\frac{5y+1}{2},\ y\in\left[0,\ \frac{7}{5}\right]}$$

Αλλάζοντας τα γράμματα προκύπτει:

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{5x+1}{2},\ x\in\left[0,\ \frac{7}{5}\right]}$$

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ (1), μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο τρόπους.

α΄ τρόπος: Η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{5x+1}{2}=\frac{2x-1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 25x+5=4x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 21x=-7 \quad \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

Η ρίζα αυτή απορρίπτεται, γιατί είναι εκτός του πεδίου ορισμού.

β΄ τρόπος: Η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ είναι γνησίως αύξουσα, επειδή $\mathbf{\frac{2}{5}>0}$, άρα η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{5}=x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1=5x \quad \Leftrightarrow \quad -1=3x \quad \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{1}{3}$$ ίδια λύση με τον α΄ τρόπο.

που απορρίπτεται.

2.7.3. Σύνθεση συναρτήσεων

Ορισμός:

Ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f/A με την g/B και συμβολίζουμε $g\circ f$ μια νέα συνάρτηση που έχει τύπο:

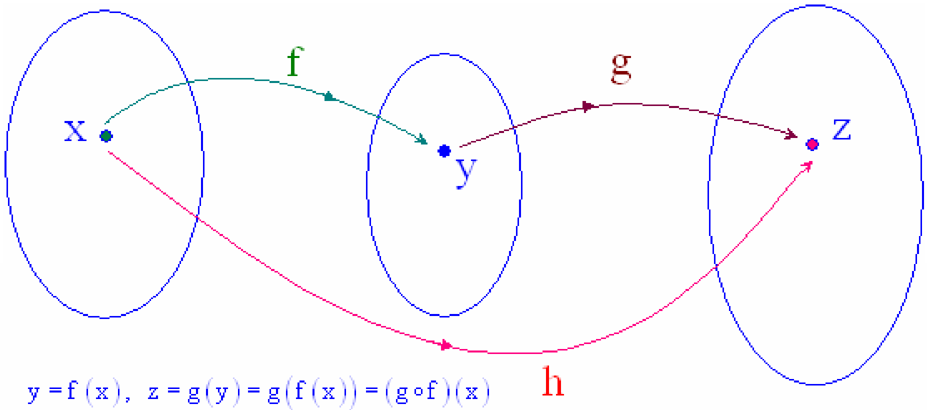
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

με πεδίο ορισμού το $A_1=\{x\in A:\ f(x)\in B\}$ όπου $A_1\subseteq A$ και $A_1\neq\varnothing$.

Σημείωση: Αν έχουμε τις συναρτήσεις $f/A\to B$ και $g/B\to\Gamma$, τότε είναι:

$$g\circ f/A\to\Gamma$$

Δηλαδή έχουμε $A_1=A$



$$y = f(x),\ z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

$$(g \circ f)(x) = z = h(x) / A \to \Gamma$$

★ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

❶ **Η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει, διότι δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή γενικά έχουμε:**

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

Υπάρχει η περίπτωση να ισχύει για μερικές συναρτήσεις, όπως για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = 3x + 2 / \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 2x + 1 / \mathbb{R}$$

αλλά αυτό δεν συμβαίνει για όλες.

❷ **Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει. Δηλαδή πάντα έχουμε:**

$$\boxed{(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)}$$

❸ **Αν η $f / A \to B$ είναι «1-1», τότε υπάρχει η αντίστροφη αυτής f^{-1} και ισχύουν:**

$$\boxed{(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x} \quad \textbf{ταυτοτική στο A}$$

$$\boxed{(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y} \quad \textbf{ταυτοτική στο B}$$

❹ **Αν οι δυο συναρτήσεις f / A και g / B είναι γνησίως μονότονες και του ίδιου είδους μονοτονίας, τότε οι συναρτήσεις:**

$$\boxed{g \circ f} \quad \textbf{και} \quad \boxed{f \circ g}$$

είναι γνησίως αύξουσες.

❺ **Αν οι f / A και g / B είναι γνησίως μονότονες, αλλά διαφορετικού είδους μονοτονίας, τότε οι συναρτήσεις:**

$\boxed{g \circ f}$ **και** $\boxed{f \circ g}$

είναι γνησίως φθίνουσες.

✯ ΣΥΝΘΕΣΗ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παράδειγμα 1ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{με} \quad x \le 0 \\ \dfrac{2}{x} & \text{με} \quad x > 0 \end{cases} \quad \textbf{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{με} \quad x > 2 \\ x^2 - 4 & \text{με} \quad x \le 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

Λύση: Παρατηρώ ότι είναι:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (3x^2+1)\circ(3x+3) = 3(2x+3)^2 + 1 & / \quad P_1 \\ \begin{cases} (3x^2+1)\circ(x^2-4) = 3(x^2-4)^2 + 1 & / \quad P_2 \\ \dfrac{2}{x}\circ(2x+3) = \dfrac{2}{2x+3} & / \quad P_3 \end{cases} \\ \dfrac{2}{x}\circ(x^2-4) = \dfrac{2}{x^2-4} & / \quad P_4 \end{cases}$$

όπου:

$$P_1 = \{x > 2 \quad \text{και} \quad 2x + 3 \le 0\} = \varnothing$$

$$P_2 = \{x \le 2 \quad \text{και} \quad x^2 - 4 \le 0\} = [-2, \quad 2]$$

$$P_3 = \{x > 2 \quad \text{και} \quad 2x + 3 > 0\} = (2, \quad +\infty)$$

$$P_4 = \{x \le 2 \quad \text{και} \quad x^2 - 4 > 0\} = (-\infty, \quad -2)$$

Σημείωση: Κανονικά η συνάρτηση **$f \circ g$** έχει **4** κλάδους. Επειδή όμως είναι $P_1=\varnothing$ έχει τελικά **3** κλάδους.

Παράδειγμα 2ο

Αν ισχύουν:

$g(x) = -2x + 5 / \mathbb{R}$ **και** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -6x + 17 / \mathbb{R}$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση: Παρατηρώ ότι ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = -6x + 17$$

Δηλαδή έχουμε $f(g(x)) = -6x + 17$ άρα ισχύει:

$$\boxed{f(-2x+5) = -6x + 17} \quad (1)$$

Στη συνέχεια ο τύπος της **f** να μπορεί να προσδιορισθεί με δυο τρόπους.

α΄ τρόπος:

Στην ισότητα (1), θέτω $y = -2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{5-y}{2}$ και επομένως έχουμε:

$$f(y) = -6x + 17 \Leftrightarrow f(y) = -6 \cdot \left(\frac{5-y}{2}\right) + 17 \Leftrightarrow$$

$$f(y) = -3(5-y) + 17 \Leftrightarrow f(y) = 3y + 2$$

Συνεπώς είναι:

$$\boxed{f(x) = 3x + 2}$$

β΄ τρόπος:

Στην (1), θέτουμε:

$$y = -2x + 5 \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$f(-2x+5) = 3(-2x) + 17 \Leftrightarrow f(-2x+5) = 3(-2x+5-5) + 17$$

Απ' αυτή και λόγω της (2), προκύπτει:

$$f(y)=3(y-5)+17=3y-15+17$$

Δηλαδή έχουμε:

$$f(y)=3y+2$$

Άρα:

$$\boxed{f(x)=3x+2}$$

Κατά τον β΄ τρόπο, προσπαθώ να εμφανίσω το y στο δεύτερο μέλος.

✯ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Υπάρχει μια ειδική κατηγορία ασκήσεων στις οποίες δεν δίνεται ο τύπος της $f/A\to B$ αλλά κάποια σχέση (ιδιότητα), η οποία ισχύει για κάθε $x\in A$ (ή για κάθε $x,y\in A$ κ. λ. π.) και η οποία αφορά την f. Με την βοήθεια αυτής της σχέσης, δίνοντας στα $x,y,...$ <u>κάποιες τιμές</u> από το Α, ανάλογα με την κρίση μας, βρίσκουμε τα ζητούμενα.

<u>**Παράδειγμα:**</u>

Αν $f/\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση όχι σταθερή και ισχύει:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \quad \textbf{(1)}$$

Δείξτε ότι:

α. $f(0)=1$, **β.** $f(-x)=f(x) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

γ. **Αν** $f(\rho)=0$, **τότε ισχύει** $f(x+4\rho)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

<u>**Λύση:**</u>

α. Επειδή η (1) ισχύει για κάθε $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει και όταν $y=0$. Για την τιμή αυτή του y και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(x)+f(x)=2\cdot f(x)\cdot f(0) \;\Rightarrow\; f(x)=f(x)\cdot f(0) \quad \forall x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow$$

$$f(x)\big(1-f(0)\big)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Από την ισότητα αυτή, επειδή δεν μπορεί να ισχύει $f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ διότι η f δεν είναι σταθερή, προκύπτει:

$$\boxed{f(0)=1}$$

β. Στην (1), θέτοντας $x=0$, έχω:

$$f(y)+f(-y)=2f(0)\cdot f(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}$$

Απ' αυτή και λόγω του ερωτήματος (α), έχω $f(-y)=f(y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$, άρα ισχύει:

$$\boxed{f(-x)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

γ. Θέτω στην (1) $y=\rho$ και έχω:

$$f(x+\rho)+f(x-\rho)=2f(x)\cdot f(\rho) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Απ' αυτή και επειδή $f(\rho)=0$, έχω:

$$f(x+\rho)+f(x-\rho)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x+\rho)=-f(x-\rho) \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Στη (2) θέτω όπου $x=y+3\rho$ και στη συνέχεια $x=y+\rho$ και έχω αντίστοιχα:

$$f(y+4\rho)=-f(y+2\rho) \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (3)$$

και

$$f(y+2\rho)=-f(y) \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$

Από τι σχέσεις (3) και (4), προκύπτει:

$$f(x+4\rho)=-f(x+2\rho)=-\left(-f(x)\right)=f(x) \quad \forall\in\mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε:

$$\boxed{f(y+4\rho)=f(y) \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$