ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

7^{O} ΜΑΘΗΜΑ

2.5.1. Ίσες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις f, g λέμε ότι είναι ίσες και συμβολίζουμε $f = g$, όταν:

- Έχουν το ίδιο πεδία ορισμού A
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Αν για τις συναρτήσεις: $\boxed{f : A \to \mathbb{R}, \quad g : B \to \mathbb{R}}$

υπάρχει υποσύνολο Γ των A, B ώστε για κάθε $x \in \Gamma$ να ισχύει $f = g$, τότε λέμε ότι συναρτήσεις είναι ίσες στο σύνολο Γ.

Παράδειγμα:

Για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \ / \ A = \mathbb{R} - \{-2\}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x} \ / \ B = \mathbb{R} - \{0\}$$

Επειδή:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$$

και

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{x(x-2)}{x} = x - 2$$

Παρατηρούμε ότι είναι:

$$\boxed{f(x) = g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Gamma}$$

όπου $\Gamma = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$, υποσύνολο των A, B. Άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες στο σύνολο Γ.

2.5.2. Πράξεις με συναρτήσεις

- **Πρόσθεση:**

$$\mathbf{f + g} \quad \Rightarrow \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \ / \quad A \cap B$$

✳ **Αφαίρεση:**

$$\mathbf{f-g} \quad \Rightarrow \quad (f-g)(x)=f(x)-g(x) \;/\; A\cap B$$

✳ **Πολλαπλασιασμός**

$$f\cdot g \quad \Rightarrow \quad (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \;/\; A\cap B$$

✳ **Διαίρεση:**

$$\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \;/\; A\cap B^*$$

Η συνάρτηση $\mathbf{g^*=\frac{1}{g}}$ ονομάζεται συμμετρική συνάρτηση της g

Δηλαδή $\mathbf{g^*=\frac{1}{g}}$ είναι η συνάρτηση με τύπο:

$$g^*(x)=\frac{1}{g(x)} \;/\; B^*=B-\{g(x)=0\}$$

Ρίζες της εξίσωσης: $g(x)=0$

Παράδειγμα:

Αν έχουμε την συνάρτηση $g\,:\, g(x)=\frac{x-1}{x-2} \;/\; B=\mathbb{R}-\{2\}$ τότε η συμμετρική αυτής, είναι:

$$\boxed{g^*:\, g^*(x)=\frac{x-2}{x-1} \;/\; B^*=\mathbb{R}-\{1,2\}}$$

2.5.3. Άρτιες - περιττές συναρτήσεις

Σημείωση:

Μια συνάρτηση για να είναι άρτια ή περιττή, πρέπει το πεδίο ορισμού της Α, να είναι συμμετρικό διάστημα ως προς το 0.

Όπως:

$\mathbf{A=[-5,5]}$ ή $\mathbf{A=(-5,5)}$ ή $(-\infty,-7)\cup(7,+\infty)$ ή το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{R}^*$

► **Η συνάρτηση f/A είναι άρτια, όταν ισχύει:**

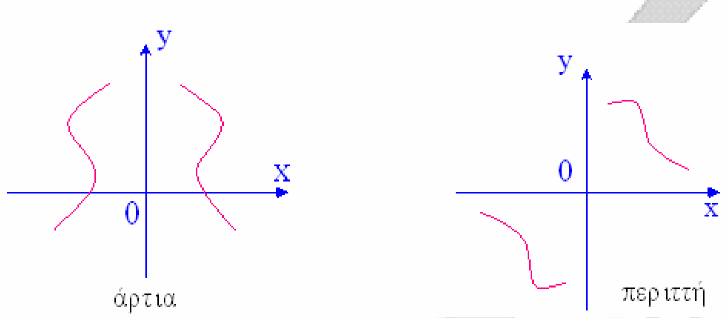
$$f(-x)=f(x) \quad \forall\; x\in A \text{ και } -x\in A$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\,/\,\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x=f(x)$$

Άρα η συνάρτηση είναι **άρτια.**

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης, παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.



► **Η συνάρτηση f/A είναι περιττή, όταν ισχύει:**

$$\mathbf{f(-x)=-f(x)} \quad \forall\ x\in A \ \ \text{και} \ \ -x\in A$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x\,/\,\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x=-f(x)$$

Επομένως η συνάρτηση είναι **περιττή.**

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης, παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

2.5.4. Κλαδικές συναρτήσεις

Έστω $f\,/\,\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=|2x-1|+3|x-2|+5x-6$$

Με την βοήθεια του πίνακα:

x		$\frac{1}{2}$	2
$2x-1$	−	+	+
$x-2$	−	−	+

Παρατηρούμε ότι:

* Για $x > 2$ έχουμε:

$$2x-1>0 \quad \text{και} \quad x-2>0$$

Η συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$f(x) = 2x-1+3x-6+5x-6 = 10x-13, \quad x>2$$

* Για $\frac{1}{2} \le x \le 2$ έχουμε:

$$2x-1 \ge 0 \quad \text{και} \quad x-2 \le 0$$

Επομένως η συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$f(x) = 2x-1-3x+6+5x-6 = 4x-1, \quad \frac{1}{2} \le x \le 2$$

* Για $x < \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$2x-1<0 \quad \text{και} \quad x-2<0$$

Άρα η συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$f(x) = -2x+1-3x+6+5x-6 = 1, \quad x < \frac{1}{2}$$

Οι παρατηρήσεις που έγιναν, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση f/A είναι μια κλαδική συνάρτηση με γενικό τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 10x-13 & \text{όταν} \quad x>2 \\ 4x-1 & \text{όταν} \quad \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ 1 & \text{όταν} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Από τον γενικό τύπο της συνάρτησης προκύπτουν για παράδειγμα οι τιμές:

$$f(1) = 4\cdot 1 - 1 = 3, \quad f(-1000) = 1, \quad f(2) = 4\cdot 2 - 1 - 7, \quad f(0) = 1$$

2.5.5. Μονοτονία συνάρτησης

Η συνάρτηση f/A είναι:

Γνησίως αύξουσα και συμβολίζεται $f \uparrow$ όταν:

$$\forall \; x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Γνησίως φθίνουσα και συμβολίζεται $f \downarrow$ όταν:

$$\forall \; x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Σταθερή και συμβολίζεται $f(x) = c$ όταν:

$$\forall \; x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Ακόμη η συνάρτηση f/A είναι:

Απλά αύξουσα και συμβολίζεται **f** $\uparrow$ όταν:

$$\forall \; x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$$

Απλά φθίνουσα και συμβολίζεται **f** $\downarrow$ όταν:

$$\forall \; x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)$$

Η μονοτονία μιας συνάρτησης, **εξετάζεται** ***πάντα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.***

Προκειμένου να βρούμε την μονοτονία μιας συνάρτησης, έχουμε δυο τρόπους δουλειάς.

<u>α΄ τρόπος</u>: Ελέγχουμε την μονοτονία αυτής, εξετάζοντας ποιος από τους ορισμούς αυτής ισχύει. Ο τρόπος αυτός προσδιορισμού της μονοτονίας, ονομάζεται **συνθετικός.**

β΄ τρόπος: Ο έλεγχος της μονοτονίας, γίνεται με τον **λόγο μεταβολής** της συνάρτησης, που είναι:

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{με} \quad x_1 \neq x_2$$

Έτσι λοιπόν έχουμε:

① Για $\lambda>0$ η f είναι **γνησίως αύξουσα.**

② Για $\lambda<0$ η f είναι **γνησίως φθίνουσα.**

③ Για $\lambda=0$ η f είναι **σταθερή.**

④ Για $\lambda \geq 0$ η f είναι **απλά αύξουσα.**

⑤ Για $\lambda \leq 0$ η f είναι **απλά φθίνουσα.**

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=-3x+5 \;/\; A=\mathbb{R}$$

Να βρεθεί η μονοτονία της.

Λύση: **α΄ τρόπος (συνθετικά)**

Έστω $x_1, x_2 \in A=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και παρατηρούμε ότι:

$$-3x_1>-3x_2 \quad \Rightarrow \quad -3x_1+5>-3x_2+5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x_1)>f(x_2)}$$

Άρα η συνάρτηση f **είναι γνησίως φθίνουσα.**

β΄ τρόπος: (λόγος μεταβολής)

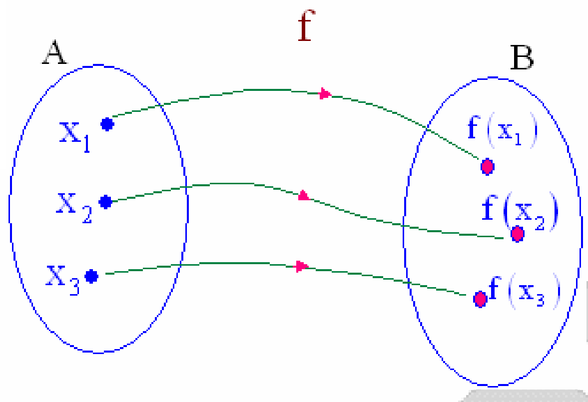
Για $x_1 \neq x_2$ ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης, είναι:

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-3x_2+5)-(-3x_1+5)}{x_2-x_1} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=-3<0}$$

Άρα η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα.**

2.5.6. Συνάρτηση ένα προς ένα « 1 – 1 »



Το παραπάνω διάγραμμα, εκφράζει μια συνάρτηση $f / A \to B$, που είναι «1-1»

Μια συνάρτηση είναι «1-1» όταν ικανοποιεί έναν από τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1ος: **Αν για κάθε $x_1 \neq x_2$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού A ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε η f είναι «1-1».**

Ορισμός 2ος: **Αν με την υπόθεση ότι $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται $x_1 = x_2$, τότε η συνάρτηση f είναι «1-1».**

Ορισμός 3ος: **Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, τότε είναι «1-1».**

Για τον 3ο ορισμό, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι:
Αν είναι $x_1 < x_2$ τότε πρέπει να είναι $f(x_1) > f(x_2)$ ή $f(x_1) < f(x_2)$. Δηλαδή για κάθε $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Παράδειγμα 1: **Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 1 / \mathbb{R}$ είναι «1-1».**

Λύση: Υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ και έχουμε:

$$3x_1^2 + 1 = 3x_2^2 + 1 \;\Rightarrow\; 3x_1^2 = 3x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow$$

$$|x_1| = |x_2| \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad ή \quad x_1 = -x_2$$

Επομένως η συνάρτηση δεν είναι **«1-1».**

Παράδειγμα 2: Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $g(x)=3x^2+1\ /\ (3,10)$ **είναι «1-1».**

Λύση: Έστω ότι είναι $g(x_1)=g(x_2)$ από την υπόθεση αυτή, προκύπτει τελικά:

$$x_1^{\ 2}=x_2^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad |x_1|=|x_2| \quad (1)$$

Επειδή $x_1,x_2\in(3,10)$, συνεπάγεται ότι $x_1,x_2>0$ επομένως από την (1) προκύπτει:

$$x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση είναι **«1-1».**