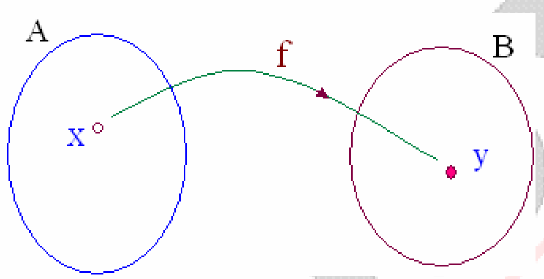
2.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6^{O} ΜΑΘΗΜΑ

2.3.1. Ορισμός συνάρτησης:

Συνάρτηση $f \,/\, A \Rightarrow B$, ονομάζεται η διαδικασία (νόμος) που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του συνόλου Α (πεδίο ορισμού) σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Β (σύνολο αφίξεων).



Όταν τα σύνολα Α, Β είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε έχουμε μια πραγματική συνάρτηση.

Από τον ορισμό της συνάρτησης, προκύπτουν:

1 $\forall\ x \in A$ υπάρχει μοναδικό $y \in B:\ y = f(x)$.

2 Η συνάρτηση ορίζεται με τον τύπο:

$$f:\ f(x) = \ldots / A$$

3 Το πεδίο ορισμού **Α** προσδιορίζεται, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι είναι $f(x) \in \mathbb{R}$ και οι παραστάσεις $\frac{A}{0}$, $\sqrt{-B^2}$ με $B \neq 0$, $\ell n0$, $\ell n\alpha$ με α<0 δεν έχουν νόημα στο $\mathbb{R}$.

<u>**Παράδειγμα:**</u> Να βρεθεί το πεδίο ορισμού **Α** της συνάρτησης με τύπο:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ell og(x-1)}}{x^2 - 9}$$

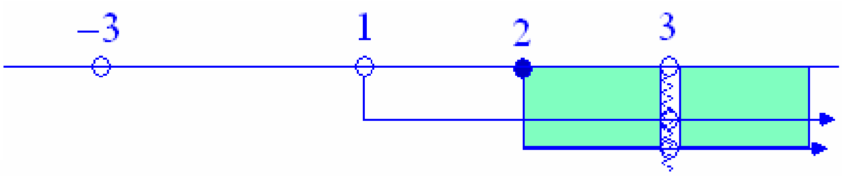
<u>**Λύση:**</u> Για να έχει νόημα η συνάρτηση πρέπει να ισχύουν:

1. $x^2 - 9 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 3$

2. $x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

3. $\ell og(x-1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell og(x-1) \geq \ell og1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς αυτούς και με την βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών:



έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι:

$$\boxed{A = [2,3) \cup (3,+\infty)}$$

4. Το $x \in A$ ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή,** ενώ το y που είναι η αντίστοιχη τιμή της f $(y = f(x))$, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

5. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης, συμβολίζεται και με D_f.

6. Το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης $f : A \to B$, ονομάζεται **σύνολο τιμών** και συμβολίζεται:

$$\boxed{f(A) = \{y /\ y = f(x) \in B \text{ για κάποιο } x \in A\}}$$

Προφανώς το $f(A)$ είναι υποσύνολο του πεδίου αφίξεων, δηλαδή $f(A) \subseteq B$.

2.3.2. Συντομογραφία συνάρτησης

Προκειμένου να οριστεί μια συνάρτηση, αρκεί να γνωρίζουμε:

- ✦ Το πεδίο ορισμού της.
- ✦ Την τιμή της $f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Γενικά η συνάρτηση f είναι γνωστή όταν είναι γνωστός ο τύπος που καθορίζει την τιμή του $f(x)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, θεωρούμε ότι είναι το σύνολο των πραγματικών τιμών $\mathbb{R}$, για τους οποίους ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα.

Έτσι για τη συνάρτηση:

$$\boxed{f : (-\infty, 3] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = x + \sqrt{3 - x}}$$

Μπορούμε να πούμε ότι δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x+\sqrt{3-x}$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι πρέπει να είναι:

$$3-x\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 3$$

που σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο:

$$\boxed{A=(-\infty,3]}$$

2.3.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f:A\to\mathbb{R}$$

Κάθε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy, λέμε ότι περιέχεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, όταν ισχύει:

$$\boxed{y=f(x)}$$

Δηλαδή το σημείο $M(x,f(x)),\quad x\in A$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Το σύνολο όλων των σημείων:

$$\boxed{M(x,f(x)),\quad x\in A}$$

αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που συμβολίζεται με C_f.

Για την τεταγμένη κάθε σημείου της γραφικής παράστασης, ισχύει $y=f(x)$. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι η γραφική παράσταση C_f είναι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης:

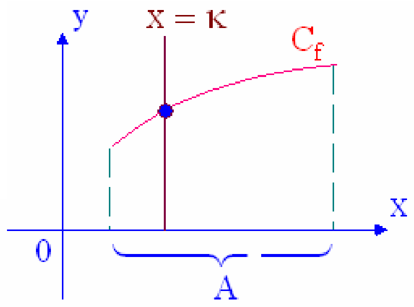
$$\boxed{y=f(x)}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης, ξέρουμε ότι σε κάθε $x\in A$, αντιστοιχεί ένα μόνο $y\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει κάθε ευθεία $x=\kappa,\quad \kappa\in A$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

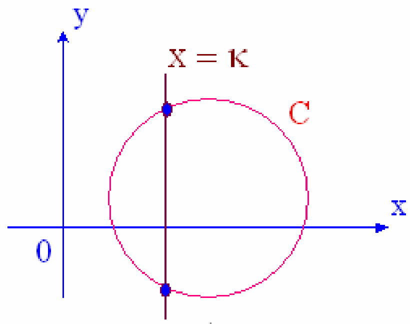
Όταν η γραφική παράσταση μιας εξίσωσης $y=f(x)$ έχει με την ευθεία $x=\kappa,\quad \kappa\in A$ δυο ή περισσότερα κοινά σημεία, τότε η σχέση:

$$y=f(x)$$

δεν είναι συνάρτηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, είναι η εξίσωση του κύκλου, σχήμα 2.



σχήμα 1



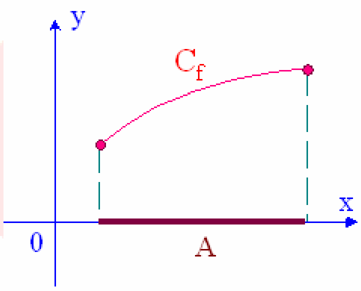
σχήμα 2

Όταν είναι δεδομένη η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε γνωρίζουμε:

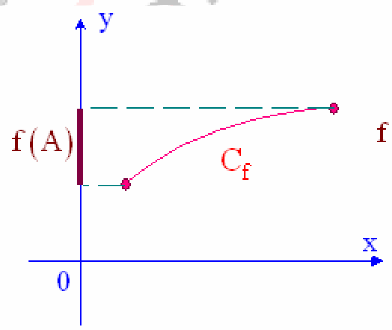
⁂ Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, που είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f, σχήμα 3.

⁂ Το σύνολο τιμών της, που είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f, σχήμα 4.

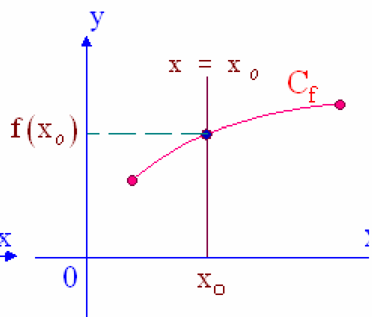
⁂ Η τιμή της f στο $x_o \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_o$ και της C_f, σχήμα 5.



σχήμα 3



σχήμα 4

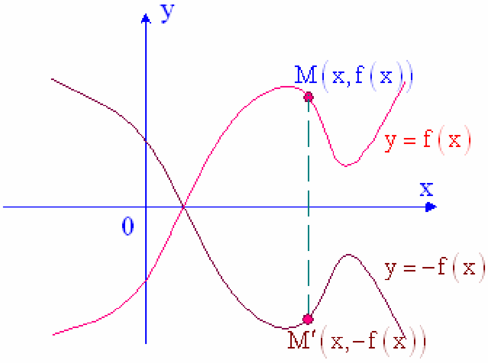


σχήμα 5

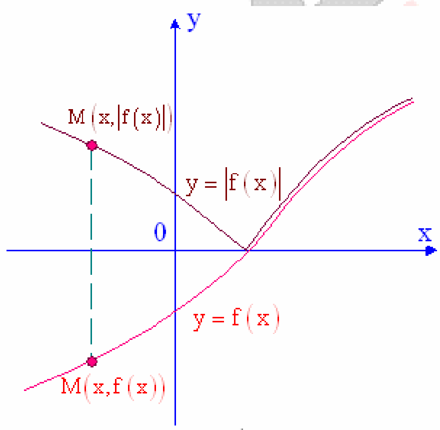
Από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, μπορούμε να έχουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$, κατά των ακόλουθο τρόπο.

✦ Η γραφική παράσταση C_f της f, είναι το σύνολο των σημείων $M\left(x,f\left(x\right)\right)$. Τα συμμετρικά αυτών ως προς τον άξονα $x'x$, είναι τα σημεία $M'\left(x,-f\left(x\right)\right)$ και ορίζουν την γραφική παράσταση της $-f$, αφού ικανοποιούν την εξίσωση $y=-f\left(x\right)$. Επομένως η γραφική παράσταση C_f' της $-f$ είναι συμμετρική της C_f, ως προς τον άξονα $x'x$, σχήμα 6.

✦ Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά των σημείων της f ως προς άξονα τον $x'x$ που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, σχήμα 7.



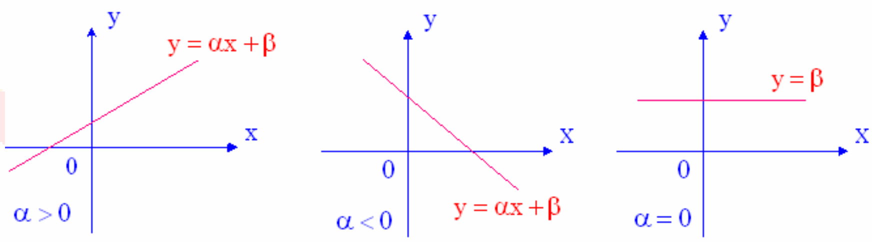
σχήμα 6



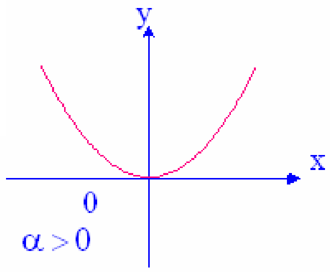
σχήμα 7

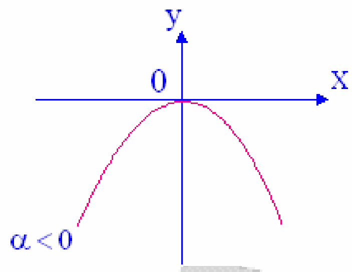
2.3.4. Βασικές συναρτήσεις

⦿ Η πολυωνυμική συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha x+\beta$

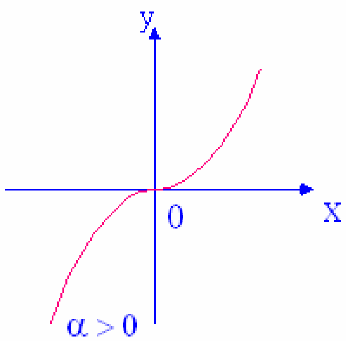


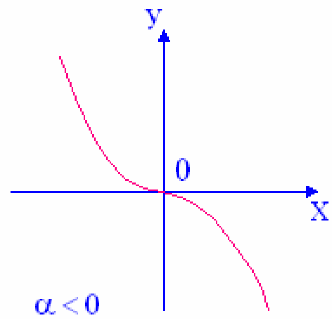
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha \neq 0$



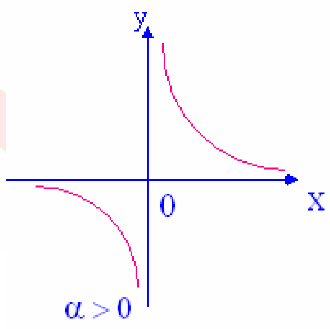


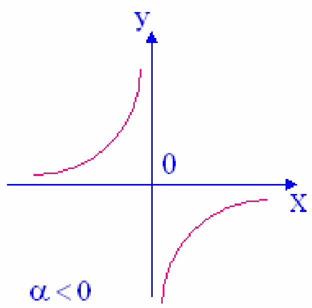
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha \neq 0$



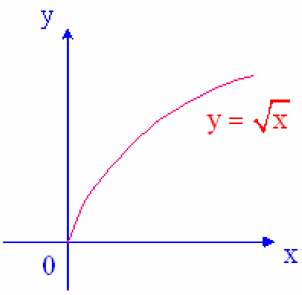


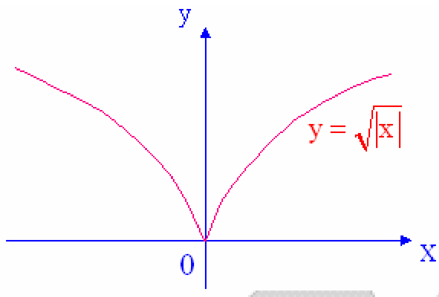
- Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$





- Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.



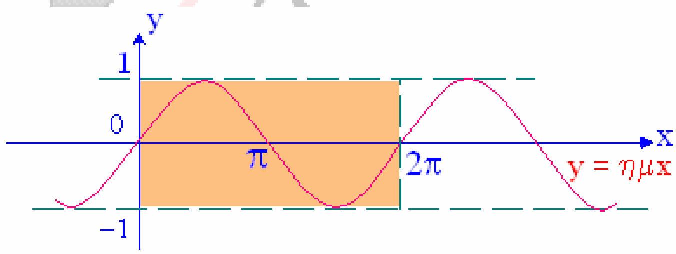


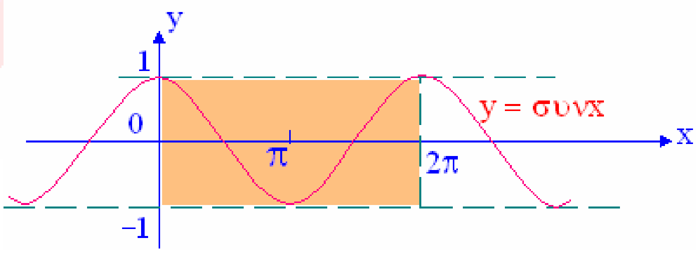
Για τη συνάρτηση $g(x)=\sqrt{|x|}$, έχουμε:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

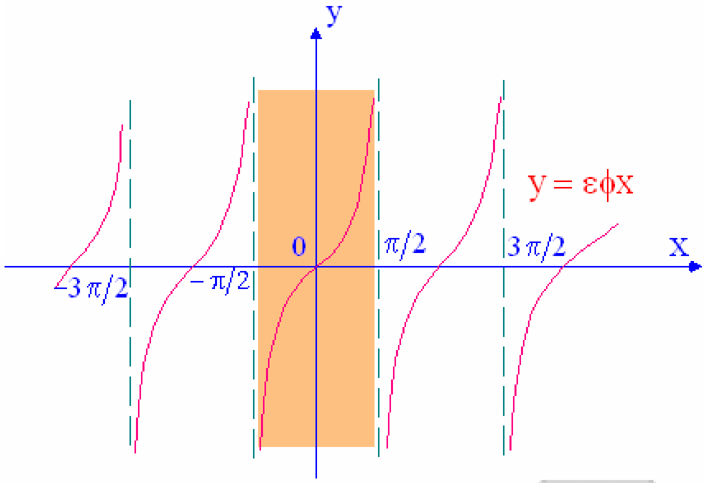
Επομένως η γραφική παράσταση της $g(x)=\sqrt{|x|}$ αποτελείται από δυο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ και ο άλλος είναι τα συμμετρικά σημεία του πρώτου, ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x)=ημx$, $g(x)=συνx$ και $h(x)=εφx$

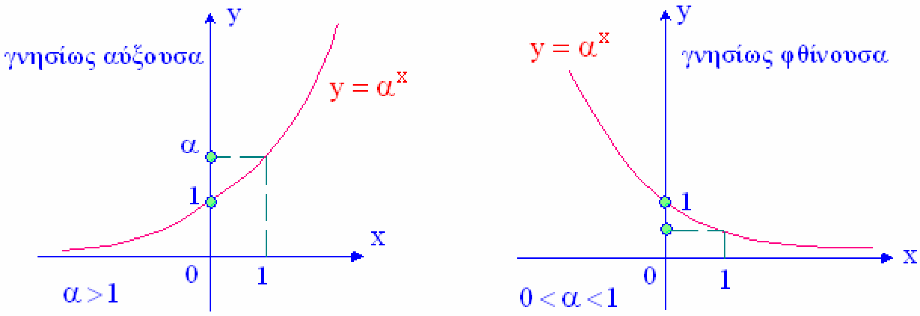




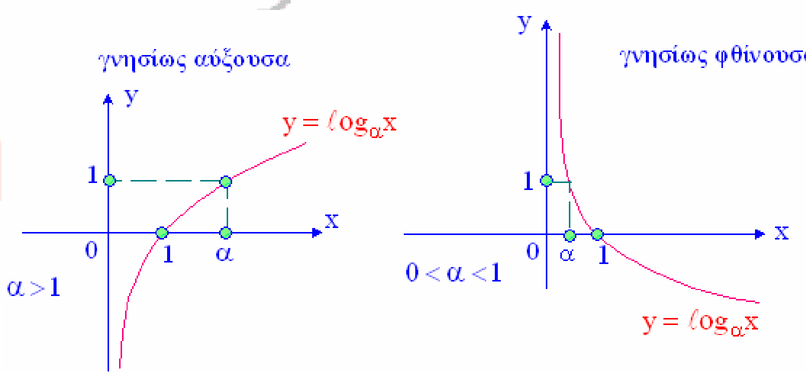
Οι συναρτήσεις $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$ είναι περιοδικές, με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $h(x)=εφx$ έχει περίοδο $T=\pi$.



- Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, \quad 0 < \alpha \neq 1$



- Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ell og_\alpha x, \quad 0 < \alpha \neq 1$



Αξίζει να θυμηθούμε ότι:

- $\ell og_\alpha x = y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^y = x, \quad 0<\alpha\neq 1,\ x>0$

- $\ell og_\alpha \alpha^x = x, \quad 0<\alpha\neq 1$ και $\alpha^{\ell og_\alpha x} = x, \quad 0<\alpha\neq 1,\ x>0$

- $\ell og_\alpha \alpha = 1$ και $\ell og_\alpha 1 = 0, \quad 0<\alpha\neq 1$

- $\ell og_\alpha (x_1 x_2) = \ell og_\alpha x_1 + \ell og_\alpha x_2, \quad 0<\alpha\neq 1, \quad x_1>0, x_2>0$

- $\ell og_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \ell og_\alpha x_1 - \ell og_\alpha x_2, \quad 0<\alpha\neq 1,\ x_1, x_2>0$

- $\ell og_\alpha x^\kappa = \kappa \cdot \ell og_\alpha x, \quad 0<\alpha\neq 1,\ x>0$

- Αν $\alpha>1 \quad \Rightarrow \quad x_1<x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell og_\alpha x_1 < \ell og_\alpha x_2$
  Η συνάρτηση $y=\ell og_\alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα

- Αν $0<\alpha<1 \quad \Rightarrow \quad x_1>x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell og_\alpha x_1 < \ell og_\alpha x_2$
  Η συνάρτηση $y=\ell og_\alpha x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

- $\alpha^x = e^{x\ell n\alpha}$ αφού $\alpha = e^{\ell n\alpha}$