9^o ΜΑΘΗΜΑ

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.9. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.9.1. Έννοια του ορίου

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ x-2, & x>2 \end{cases} \quad / \quad [0,4] \quad (1)$$

Έστω $x_o=2$. Η τιμή αυτή που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, μπορούμε να πούμε ότι περιέχεται στο διάστημα:

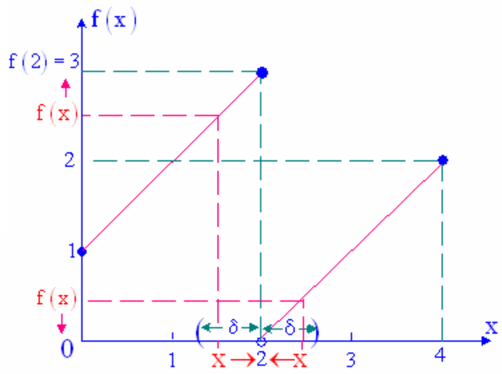
$$x_o\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$$

όπου δ ένα θετικός πραγματικός αριθμός. Κάθε $x\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$ είναι μικρότερο του x_o ή μεγαλύτερο αυτού. Αυτό σημαίνει ότι ο κάθε $x\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$ μπορεί να πλησιάζει στο x_o από τα αριστερά, μικρότερες τιμές ή από τα δεξιά μεγαλύτερες τιμές. Οι δυο αυτές εκφράσεις, συμβολίζονται με τον ακόλουθο τρόπο αντίστοιχα:

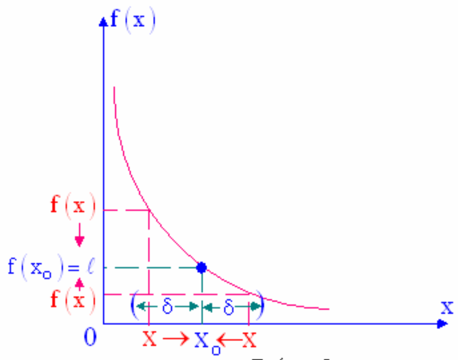
$\boxed{x\to x_o^- \quad \text{απο τα μικρά}}$ ή $\boxed{x\to x_o^+ \quad \text{απο τα μεγάλα}}$

Στο σχήμα 1, έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (1) και παρατηρούμε ότι όσο το x πλησιάζει στο $x_o=2$ από τα μικρά $(x\to 2^-)$, η τιμή της συνάρτησης πλησιάζει στο 3. Τα παραπάνω γράφουμε συμβολικά:

$$\boxed{\lim_{x\to 2^-} f(x)=3}$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

και λέμε ότι το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης είναι ίσο με 3.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι όσο το x πλησιάζει στο $x_o = 2$ από τα μεγάλα $\left(x \to 2^+\right)$, η τιμή της συνάρτησης πλησιάζει στο 0. Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφουμε:

$$\boxed{\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0}$$

και λέμε ότι το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης είναι ίσο με 0.

Στο σχήμα 2 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνάρτησης:

$$f : A \to \mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o) = \ell}$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια όταν το x πλησιάζει στο x_o, είναι ίσα με πραγματικό αριθμό ℓ. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι υπάρχει το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o και συμβολίζουμε:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε τον ορισμό:

Ορισμός: **Αν f/A είναι μια συνάρτηση, θα λέμε:**

$$\lim_{x \to x_0} f(\chi) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

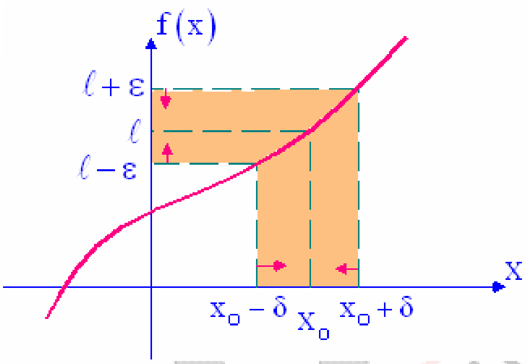
Όταν υπάρχει $\delta > 0$: **με** $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

για κάθε $\varepsilon > 0$, $\forall x \in A$

Απλουστεύοντας τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι αν για τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell}$$

σημαίνει ότι για κάθε περιοχή $(x_o - \delta, x_o + \delta) \in A$ που περιέχει το x, υπάρχει αντίστοιχη περιοχή $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \in \mathbb{R}$ που περιέχει την τιμή $f(x)$, ώστε όσο μικραίνει το δ δηλαδή το x πλησιάζει το x_o, αντίστοιχα μικραίνει το ε, που σημαίνει ότι η τιμή $f(x)$, πλησιάζει στο ℓ. Οι αριθμοί δ, ε είναι θετικοί πραγματικοί.



◈ ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

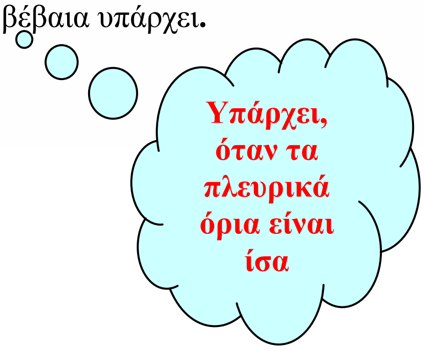
① Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} (f(x) - \ell) = 0$

② Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} (-f(x)) = -\ell$

③ Είναι $\lim_{x \to x_o} f(x) = c$ αν η $f(x) = c$ είναι σταθερή.

④ Είναι $\lim_{x \to x_o} f(x) = x_o$ αν η $f(x) = x$ είναι ταυτοτική.

⑤ Το $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ είναι μοναδικό, αν βέβαια υπάρχει.



2.9.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ[1]

Αν **f, g** είναι δυο συναρτήσεις που έχουν όρια $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\lim_{x\to x_0} f = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g = \ell_2$, τότε ισχύουν:

❶ $\lim_{x\to x_0}(f \pm g) = \lim_{x\to x_0} f \pm \lim_{x\to x_0} g = \ell_1 \pm \ell_2$

❷ $\lim_{x\to x_0}(f \cdot g) = \lim_{x\to x_0} f \cdot \lim_{x\to x_0} g = \ell_1 \cdot \ell_2$

❸ $\lim_{x\to x_0}(\kappa f) = \kappa \lim_{x\to x_0} f = \kappa \ell_1, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

❹ $\lim_{x\to x_0}(f^{\kappa}) = \left(\lim_{x\to x_0} f\right)^{\kappa} = \ell_1^{\kappa}, \quad \kappa \in \mathbb{N}^*$

❺ $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} f} = \frac{1}{\ell_1}$, με $f, \ell_1 \neq 0$

❻ $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} g}{\lim_{x\to x_0} f} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$, με $f, \ell_1 \neq 0$

Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν, μόνο όταν οι συναρτήσεις f,g έχουν όρια $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ Δηλαδή είναι συγκλίνουσες στο $\mathbb{R}$

❼ $\lim_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x\to x_0} f} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}, \quad \kappa \in \mathbb{N}^*$ και $f, \ell_1 \geq 0$

❽ $\lim_{x\to x_0} |f| = \left|\lim_{x\to x_0} f\right| = |\ell_1|$

[1] Οι παραπάνω ιδιότητες επεκτείνονται και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις.

2.9.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1 Αν ισχύει $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in A$ και είναι $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0$, τότε υποχρεωτικά ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

2 Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$, τότε η συνάρτηση θα είναι ομόσημη με το όριο της. Δηλαδή:

i. Αν $\ell > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$ και $\dfrac{\ell}{2} < f(x) < \dfrac{3\ell}{2}$

ii. Αν $\ell < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0$ και $\dfrac{3\ell}{2} < f(x) < \dfrac{\ell}{2}$

Γενικά ισχύει:

$$\frac{|\ell|}{2} < |f(x)| < \frac{3|\ell|}{2}$$

3 Αν είναι $f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \geq 0$

Γενικά: Αν είναι $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_o} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$

4 Κριτήριο παρεμβολής (ισοσυγκλίνουσες)

Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \lim\limits_{x \to x_o} h(x) = \ell$, όπου **A** κοινό πεδίο ορισμού, τότε υπάρχει $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$

2.10. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$ για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, μόνο όταν $x_o \in A$. Έτσι έχουμε:

① $\lim\limits_{x\to x_o}(\eta\mu x)=\eta\mu x_o \quad \forall x_o\in\mathbb{R}$

② $\lim\limits_{x\to x_o}(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu x_o \quad \forall x_o\in\mathbb{R}$

③ $\lim\limits_{x\to x_o}(\varepsilon\varphi x)=\varepsilon\varphi x_o \quad \forall x_o\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

④ $\lim\limits_{x\to x_o}(\sigma\varphi x)=\sigma\varphi x_o \quad \forall x_o\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)=1$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\right)=1$

ΠΡΟΣΟΧΗ
το
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)$
ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

2.11. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (αλλαγή μεταβλητής)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y\to\xi} f(y)=\ell\\ \lim\limits_{\chi\to\chi_o} g(x)=\xi\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f\big(g(x)\big)=\lim\limits_{\psi\to\xi} f(y)=\ell$$

όπου $g(x)=y\to\xi$ όταν $x\to x_o$.

2.12. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΟΡΙΟΥ

Ορισμός: **Θα λέμε ότι το** $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ **της** f/A**, όταν υπάρχει** $\delta>0$**, ώστε όταν** $0<|x-x_o|<\delta$**, να ισχύει** $f(x)>M$ **για κάθε** $M>0$ **και για κάθε** $x\in A$.

Ορισμός: **Θα λέμε ότι το** $\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty$ **της** f/A**, όταν υπάρχει** $\delta>0$**, ώστε όταν** $0<|x-x_o|<\delta$**, να ισχύει** $f(x)<-M$ **για κάθε** $M>0$ **και για κάθε** $x\in A$.

ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

❶ $\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}\left(-f(x)\right)=\mp\infty$

❷ $\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_o}|f(x)|=+\infty,\quad \lim_{x\to x_o}\sqrt[\kappa]{|f(x)|}=+\infty$

❸ $\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=0$

❹ **Αν** $\lim_{x\to x_o} g(x)=0$ **τότε** $\lim_{x\to x_o}\dfrac{1}{g(x)}=\begin{cases}+\infty & \alpha\nu\quad g>0\\ -\infty & \alpha\nu\quad g<0\end{cases}$

❺ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell>0\\ \lim_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_o}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha\nu\quad g(x)>0\\ -\infty & \alpha\nu\quad g(x)<0\end{cases}$

❻ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell<0\\ \lim_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_o}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha\nu\quad g(x)<0\\ -\infty & \alpha\nu\quad g(x)>0\end{cases}$

❼ **Αν** $g(x)\le f(x)$, **τότε:**

$$\begin{cases}\text{i.} & \alpha\nu\quad \lim_{x\to x_o} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \text{ii.} & \alpha\nu\quad \lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{cases}$$

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΑΘΗΤΩΝ

ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)\pm\alpha=+\infty$

$(-\infty)\pm\alpha=-\infty$

ΠΟΛ/ΣΜΟΣ

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

$(+\infty).(-\infty)=-\infty$

$(-\infty).(-\infty)=+\infty$

$(+\infty).\alpha=+\infty,\ \alpha>0$

$(+\infty).\alpha=-\infty,\ \alpha<0$

$(-\infty).\alpha=-\infty,\ \alpha>0$

$(-\infty).\alpha=+\infty,\ \alpha<0$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$\frac{+\infty}{\alpha}=+\infty,\ \alpha>0$

$\frac{+\infty}{\alpha}=-\infty,\ \alpha<0$

$\frac{-\infty}{\alpha}=-\infty,\ \alpha>0$

$\frac{-\infty}{\alpha}=+\infty,\ \alpha<0$

$\frac{0}{\infty}=0,\quad \frac{\alpha}{\infty}=0$

ΑΟΡΙΣΤΙΕΣ

$\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$0.\infty$

$(+\infty)-(+\infty)$

$\infty-\infty$

ΜΙΣΟΑΟΡΙΣΤΙΑ

$\frac{\alpha}{0}=\pm\infty,\ \alpha\neq 0$

ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 4 ΚΑΙ 5