**$2^{o}$ ΜΑΘΗΜΑ**

## 1.5. Συζυγείς μιγαδικοί

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$. Ο μιγαδικός αριθμός $\alpha-\beta i$ ονομάζεται συζυγής αυτού και συμβολίζεται με $\bar{z}$

Δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{\bar{z}=\alpha-\beta i}$$

Παρατήρηση: Οι συζυγείς μιγαδικοί, διαφέρουν μόνο κατά το πρόσημο του φανταστικού μέρους.

Είναι αυτονόητο ότι:

$$\bar{\bar{z}}=z$$

Ενώ για τους συζυγείς $\bar{z}$, $z$ ισχύει:

$$z+\bar{z}=2\alpha \quad \text{και} \quad z-\bar{z}=2\beta i$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\boxed{\frac{z+\bar{z}}{2}=\operatorname{Re}(z)} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{z-\bar{z}}{2}=i\operatorname{Im}(z)}$$

Ακόμη ισχύει:

$$z\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2-\beta^2(-1)=\alpha^2+\beta^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{z\cdot\bar{z}=\alpha^2+\beta^2}$$

Πρόταση: Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

**α:** $\boxed{z\in\mathbb{R} \iff z=\bar{z}}$ **β:** $\boxed{z\in I \iff z=-\bar{z}}$

Απόδειξη:

**α:** $(\Rightarrow)$ $z\in\mathbb{R} \Rightarrow z=\alpha+0i$

και είναι:

$$\bar{z}=\alpha-0i$$

άρα ισχύει:

$$z=\bar{z}$$

$$(\Leftarrow) \quad z=\bar{z} \Rightarrow \alpha+\beta i=\alpha-\beta i \Rightarrow 2\beta i=0 \Rightarrow$$
$$\beta=0 \Rightarrow z=\alpha+0i \Rightarrow z\in\mathbb{R}$$

**β:** $(\Rightarrow)$ $z \in I \Rightarrow z = 0 + \beta i$

και είναι:

$$\overline{z} = 0 - \beta i$$

επομένως:

$$z = -\overline{z}$$

$(\Leftarrow)$ $z = -\overline{z} \Rightarrow \alpha + \beta i = -(\alpha - \beta i) \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow$
$\alpha = 0 \Rightarrow z = 0 + \beta i \Rightarrow z \in I$

### 1.5.1. Συζυγείς και πράξεις

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i \quad (1)$$

και παρατηρούμε ότι είναι:

$$\overline{z}_1 = \alpha_1 - \beta_1 i, \quad \overline{z}_2 = \alpha_2 - \beta_2 i \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) έχουμε:

$$z_1 + z_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) i$$

με συνέπεια να προκύπτει:

$$\overline{z_1 + z_2} = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) i \quad (3)$$

Ενώ από τις σχέσεις (2) έχουμε:

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) i \quad (4)$$

Τελικά από τις ισότητες (3), (4) προκύπτει:

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \quad (5)}$$

που σημαίνει ότι:

**Ο συζυγής του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών, είναι ίσος με το άθροισμα των συζυγών τους.**

Η προηγούμενη ισότητα (5), με την βοήθεια της επαγωγής επεκτείνεται για ν μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \ldots + \overline{z}_\nu}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ισότητες (1) κατά μέλη, έχουμε:

$$z_1z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) \quad \Rightarrow \quad z_1z_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i$$

ενώ είναι:

$$\overline{z_1z_2} = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i \qquad (6)$$

Από τον πολλαπλασιασμό των (2) κατά μέλη, προκύπτει:

$$\overline{z}_1\overline{z}_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i \qquad (7)$$

Από τις ισότητες (6) και (7) έχουμε:

$$\boxed{\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2} \qquad (8)$$

Που σημαίνει ότι:

**Ο συζυγής του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών, είναι ίσος με το γινόμενο των συζυγών τους.**

Όπως η σχέση (5), έτσι και η σχέση (8) με τη βοήθεια της επαγωγής επεκτείνεται για ν παράγοντες, με συνέπεια να έχουμε:

$$\boxed{\overline{z_1z_2...z_\nu} = \overline{z}_1\overline{z}_2...\overline{z}_\nu} \qquad (9)$$

Αν είναι:

$$z_1 = z_2 = ... = z_\nu = z$$

τότε ισχύει και:

$$\overline{z}_1 = \overline{z}_2 = ... = \overline{z}_\nu = \overline{z}$$

με συνέπεια η σχέση (9) να έχει τη μορφή:

$$\overline{z^\nu} = \overline{z}^\nu$$

**Δηλαδή ο συζυγής μιας δύναμης, είναι η δύναμη του συζυγούς.**

Αν είναι $z = \frac{z_1}{z_2}$ με $z_2 \neq 0$ ισχύει και $zz_2 = z_1$ με συνέπεια να έχουμε:

$$\overline{zz_2} = \overline{z}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \cdot \overline{z}_2 = \overline{z}_1$$

Άρα:

$$\overline{z} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

που σημαίνει ότι:

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}}$$

Δηλαδή:

**Ο συζυγής του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών, είναι ίσος με το πηλίκο των συζυγών τους.**

Είναι φανερό ότι αν έχουμε $z_1 = 1$ και $z_2 = z$, τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$$

που σημαίνει ότι:

**Ο συζυγής του αντιστρόφου ενός μιγαδικού αριθμού, είναι ίσος με τον αντίστροφο του συζυγούς του.**

Παραδείγματα:

**1.** Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι ο αριθμός:

$$w = z_1\overline{z}_1 + \alpha\left(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2\right) + z_2\overline{z}_2$$

Είναι πραγματικός.

**Σκέψεις – Συμβουλές**

**Προκειμένου να δείξουμε ότι ένας αριθμός $z$ είναι πραγματικός, αρκεί να δείξουμε:**

$$z = \overline{z}$$

**Έχοντας βέβαια υπ' όψιν, ότι αν είναι $z = \alpha + \beta i$, ισχύουν:**

$$z + \overline{z} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}$$

**Ασφαλώς πρέπει με προσοχή να παρατηρήσουμε την έκφραση του δεδομένου αριθμού, πριν αποφασίσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα ενεργήσουμε.**

<u>Λύση:</u>

Για τον δεδομένο αριθμό, παρατηρούμε ότι έχουμε:

$$z_1\overline{z}_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad z_2\overline{z}_2 \in \mathbb{R}$$

Ενώ παρατηρούμε ότι είναι:

$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z \in \mathbb{R}$$

Αφού είναι άθροισμα συζυγών:

$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2}$$

Άρα ο $w$ είναι πραγματικός αριθμός, ως άθροισμα πραγματικών.

**2.** Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha$, $\beta$ ώστε οι αριθμοί:

$$z = 3 + i(2\alpha - \beta) \qquad \text{και} \qquad w = \alpha - 5\beta + 3i$$

να είναι συζυγείς.

<u>Λύση:</u>

Αρκεί να προσδιορίσουμε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$z = \overline{w} \Leftrightarrow 3 + i(2\alpha - \beta) = \alpha - 5\beta - 3i \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha - 5\beta &= 3 \\ 2\alpha - \beta &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 3 + 5\beta \\ 2(3 + 5\beta) - \beta &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 3 + 5\beta \\ 6 + 10\beta - \beta &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 3 + 5\beta \\ 9\beta &= -9 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 3 - 5 \\ \beta &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= -1 \end{aligned}}$$