2. ΟΡΙΟ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5^{O} ΜΑΘΗΜΑ

2.1. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1.1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, είναι γνωστό και με τα στοιχεία του δουλέψαμε όλες τις προηγούμενες τάξεις. Στο σημείο όμως αυτό, είναι σκόπιμο να ανακεφαλαιώσουμε τις γνώσεις μας και να τις βάλουμε σε τάξη.

Οι πραγματικοί αριθμοί, αποτελούνται από:

⁂ Τους ρητούς αριθμούς που συμβολίζονται με $\mathbb{Q}$ και είναι το σύνολο:

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{\frac{\alpha}{\beta}/ \quad \text{ακέραιοι με } \beta\neq 0\right\}}$$

Βλέπετε αμέσως δημιουργείται η ανάγκη να θυμηθούμε τους ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι συμβολίζονται με $\mathbb{Z}$ και είναι το σύνολο:

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

Μέσα στο σύνολο των ακέραιων αριθμών, δηλαδή υποσύνολο του συνόλου των ακεραίων, είναι οι φυσικοί αριθμοί, που συμβολίζουμε με $\mathbb{N}^*$ και είναι το σύνολο:

$$\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\dots\}$$

Έχει καθιερωθεί όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των φυσικών αριθμών, να εννοούμε το σύνολο:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$$

⁂ Τους άρρητους αριθμούς. Άρρητοι είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Δηλαδή είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

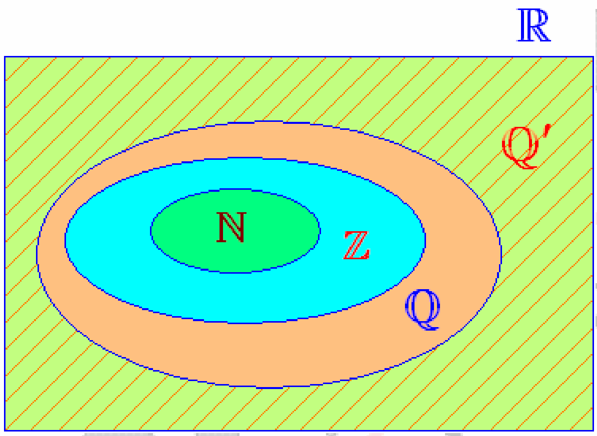
$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{με} \quad \beta\neq 0}$$

Το σύνολο των άρρητων αριθμών συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}'$ και είναι συμπληρωματικό σύνολο του $\mathbb{Q}$ ως προς το $\mathbb{R}$. Δηλαδή σ' αυτό περιέχονται όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί.

⁂ Για τα σύνολα $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}'$ και $\mathbb{R}$, ισχύουν:

$$\boxed{\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R},\quad \mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}\quad \text{αλά}\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing,\quad \text{ενώ}\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}} \qquad (1)$$

Οι παραπάνω συνθήκες, απεικονίζονται στο διάγραμμα του Venn που ακολουθεί:



<u>Προσοχή:</u> Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι υποσύνολο του $\mathbb{Q}'$, όπως θα μπορούσε να συμπεράνει κάποιος από το διάγραμμα του Venn. Είναι δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα, όπως σημειώνεται και στις συνθήκες (1). Για τον λόγο άλλωστε αυτό η διαγράμμιση του $\mathbb{Q}'$ είναι διαφορετική.

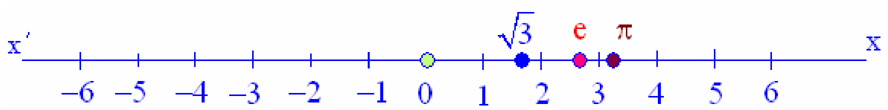
Στα σύνολα $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ περιέχεται το μηδέν. Όταν συμβολίζουμε:

$$\mathbb{N}^*,\ \mathbb{Z}^*,\ \mathbb{Q}^*,\ \mathbb{R}^*$$

τότε το μηδέν δεν περιέχεται.

⁂ Άξονας των πραγματικών αριθμών

Αν σε ευθεία ορίσουμε σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε το 0 και δεξιά αυτού άλλο σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε το 1, τότε έχουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών, όπως εμφανίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Η ευθεία αυτή, ονομάζεται και άξονας των πραγματικών αριθμών. Σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα. Όπως παρατηρείτε και στο σχήμα, οι θετικοί αριθμοί είναι δεξιά του μηδενός, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί είναι δεξιά αυτού.

2.1.2. Πράξεις και διάταξη στο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, έχουμε ορίσει την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και μέσω αυτών την αφαίρεση και διαίρεση. Οι ιδιότητες των πράξεων είναι γνωστές και δεν είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σ' αυτές.

Είναι σκόπιμο όμως να αναφερθούμε διεξοδικότερα στη διάταξη που υπάρχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος ή ίσος του β και συμβολίζουμε $\alpha \geq \beta$, αν και μόνο αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αριθμός θετικός ή μηδέν. Η παραπάνω πρόταση εκφράζεται από την ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta \geq 0}$$

Στην περίπτωση που δεν μπορεί να έχουμε ισότητα μεταξύ των αριθμών α, β τότε συμβολίζουμε $\alpha > \beta$ και ισχύει οι ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta > 0}$$

Προσέξτε στο σχήμα. Ένας πραγματικός θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από ένα άλλο θετικό, αν είναι πιο μακριά από την αρχή 0 του άξονα. Αντίθετα για τους αρνητικούς αριθμούς, ο μεγαλύτερος είναι πιο κοντά στην αρχή 0.

Η διάταξη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:

1. Αν $\boxed{\alpha \geq \beta \quad \text{και} \quad \beta \geq \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq \gamma}$

Είναι η μεταβατική ιδιότητα

2. $\boxed{\alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma}$

Αν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε έχουμε ομόστροφη ανισότητα.

3.
$$\boxed{\begin{cases} \alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\gamma \geq \beta\gamma \quad \text{όταν} \quad \gamma > 0 \\ \qquad\qquad \text{και} \\ \alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\gamma \leq \beta\gamma \quad \text{όταν} \quad \gamma < 0 \end{cases}}$$

Όταν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη μιας ανισότητας με θετικό αριθμό, προκύπτει ομόστροφη ανισότητα, ενώ αν πολλαπλασιάσουμε με αρνητικό αριθμό, η ανισότητα αλλάζει φορά.

4. Αν $\boxed{\alpha \geq \beta \quad \text{και} \quad \gamma \geq \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha+\gamma \geq \beta+\delta}$

Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη δυο ομόστροφες ανισότητες και προκύπτει ομόστροφη μ' αυτές ανισότητα.

5. **Αν** $\boxed{\begin{cases} \alpha \geq \beta \quad \text{και} \quad \gamma \geq \delta \\ \quad\quad \text{με} \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha\gamma \geq \beta\delta}$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δυο ομόστροφες ανισότητες, εφ' όσον τα μέλη τους είναι θετικοί αριθμοί.

6. Αν $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\beta \geq 0 \quad \text{και} \quad \beta \neq 0}$

7. Αν $\alpha,\beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\nu \geq \beta^\nu}$$

Δηλαδή μπορούμε να υψώσουμε στην ίδια δύναμη και τα δυο μέρη μια ανισότητας, όταν αυτά είναι θετικοί αριθμοί και προκύπτει ομόστροφη ανισότητα.

8. Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}}$$

Αν και τα δυο μέρη μιας ανισότητας είναι θετικοί αριθμοί, οι αντίστροφοι αυτών, δίνουν ετερόστροφη ανισότητα και αντίστροφα.

2.1.3. Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

- $(\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}/\ \alpha<x<\beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

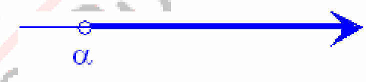
- $[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}/\ \alpha\le x\le\beta\}$: **κλειστό διάστημα**

- $[\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}/\ \alpha\le x<\beta\}$: **κλειστό αριστερά ανοικτό δεξιά**

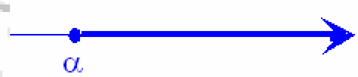
- $(\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}/\ \alpha<x\le\beta\}$: **ανοικτό αριστερά κλειστό δεξιά**

Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

- $(\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/\ x>\alpha\}$



- $[\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/\ x\ge\alpha\}$



- $(-\infty,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}/\ x<\alpha\}$

- $(-\infty,\alpha]=\{x\in\mathbb{R}/\ x\le\alpha\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών υπό μορφή διαστήματος, είναι:

$$\boxed{\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$$

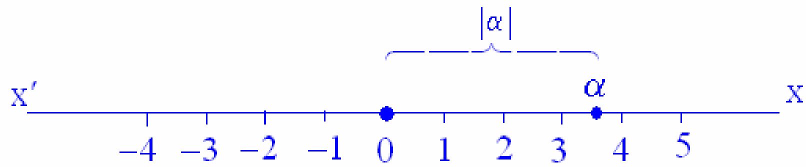
Τα σημεία ενός διαστήματος Δ που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, **είναι εσωτερικά σημεία** του Δ.

2.1.4. Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

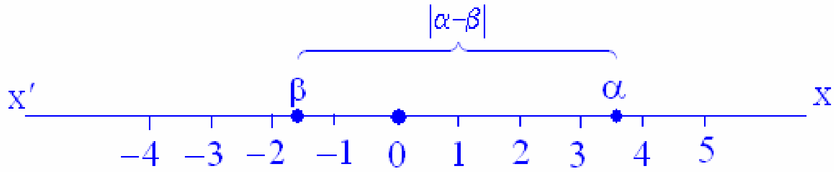
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τη συνθήκη:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \ge 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού α, εκφράζει την απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί στον αριθμό, από το μηδέν που είναι η αρχή του άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\alpha - \beta$, εκφράζει την απόσταση των σημείων που αντιστοιχούν στους αριθμούς α, β όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών, χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:

- $|\alpha|^2 = \alpha^2$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, για καθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}^*$
- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|x - x_o| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta < x - x_o < \delta \quad \Leftrightarrow \quad x_o - \delta < x < x_o + \delta, \quad \delta > 0$