1.10. ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχέσεις μιγαδικών αριθμών και σχήματα

Επειδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών απεικονίζεται στο επίπεδο, οι σχέσεις μεταξύ τους εκφράζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Στην ενότητα αυτή δίνουμε βασικές σχέσεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών και τα σχήματα που εκφράζουν.

Έτσι λοιπόν έχουμε:

1. Η σχέση:

$$\boxed{z+\bar{z}=\kappa}$$

για τον μιγαδικό αριθμό $z=x+yi$ εκφράζει την ευθεία:

$$\boxed{x=\frac{\kappa}{2}}$$

2. Η σχέση:

$$\boxed{z-\bar{z}=\kappa i}$$

για τον μιγαδικό αριθμό $z=x+yi$ εκφράζει την ευθεία:

$$\boxed{y=\frac{\kappa}{2}}$$

Είναι φανερό ότι για $\kappa=0$ από την (1) έχουμε τον άξονα των τεταγμένων, ενώ από την (2) έχουμε τον άξονα των τετμημένων.

3. Η σχέση:

$$\boxed{|z|=\kappa, \qquad \in \mathbb{R}_+^*}$$

δίνει κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα κ.

Πράγματι αν $z=x+yi$, έχουμε:

$$\boxed{|x+yi|=\kappa \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=\kappa^2}$$

4. Η σχέση:

$$\boxed{\left|z-(\alpha+\beta i)\right|=\kappa, \qquad \kappa\in\mathbb{R}_{+}^{*}}$$

δίνει κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(\alpha,\beta)$ και ακτίνα κ.

Πράγματι από την σχέση αυτή προκύπτει ότι οι εικόνες του z έχουν σταθερή απόσταση κ από την εικόνα του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Άρα περιέχονται στον κύκλο:

$$\left(\Lambda(\alpha,\beta),\kappa\right)$$

του οποίου η εξίσωση είναι:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\kappa^2}$$

5. Η σχέση:

$$\boxed{|z|<\kappa}$$

εκφράζει τα εσωτερικά σημεία του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα κ, διότι μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$\boxed{|z-0|<\kappa}$$

που σημαίνει ότι οι εικόνες του z απέχουν από την αρχή απόσταση μικρότερη του κ.

6. Ομοίως η σχέση:

$$\boxed{|z|>\kappa}$$

εκφράζει τα εξωτερικά σημεία του ίδιου κύκλου.

7. Η σχέση:

$$\boxed{\left|z-(\alpha+\beta i)\right|=\left|z-(\gamma+\delta i)\right|}$$

εκφράζει την μεσοκάθετο του τμήματος, του οποίου τα άκρα είναι τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(\gamma,\delta)$.

Πράγματι η σχέση δηλώνει ότι οι εικόνες του z ισαπέχουν από τις εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, άρα περιέχονται στην μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν οι εικόνες αυτές.

Παραδείγματα:

1. **Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι:**

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

Λύση:

Συμβουλές

Όταν σε μια σχέση έχουμε τετράγωνα μέτρων, ο κύριος τρόπος να δουλέψουμε, είναι να κάνουμε χρήση της ισότητας:

$$|z|^2=z\bar{z}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \quad \Rightarrow$$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2 \quad \Rightarrow$$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+|z_2|^2}$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την αντιμετώπιση διαφόρων ασκήσεων και μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη.

2. Αν ισχύει:

$$|z-2-i|\le 5 \quad (1)$$

να δειχθεί ότι:

$$8\le|z-14-6i|\le 18 \quad (2)$$

Λύση:

Σκέψεις

Στη σχέση (1), επιδιώκουμε να εμφανιστεί ο αριθμός:

$$z-14-6i$$

Παρατηρούμε ότι:

$$|z-2-i| = |(z-14-6i)+(12+5i)| \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$|(z-14-6i)+(12+5i)| \le 5$$

Από την τριγωνική ανισότητα, προκύπτει:

$$\big||z-14-6i|-|12+5i|\big| \le |(z-14-6i)+(12+5i)|$$

Επομένως ισχύει:

$$\big||z-14-6i|-|12+5i|\big| \le 5 \quad \Leftrightarrow$$

Ισχύει:
$|x| \le \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \le x \le \alpha$

$$-5 \le |z-14-6i|-|12+5i| \le 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$|12+5i|-5 \le |z-14-6i| \le |12+5i|+5$$

Επειδή:

$$|12+5i| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

έχουμε:

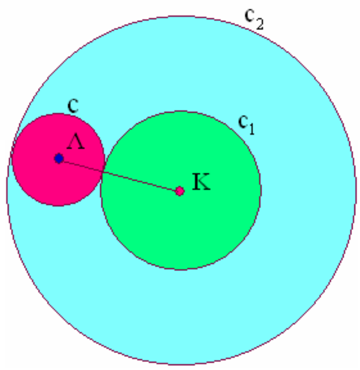
$$\boxed{8 \le |z-14-6i| \le 18}$$

Γεωμετρική ερμηνεία της άσκησης

Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την (1), είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου (c) που έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 5$, διότι:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad |z-(2+i)| \le 5$$

Που σημαίνει ότι οι εικόνες του z έχουν απόσταση μικρότερη ή ίση του 5, από την εικόνα $\Lambda(2,1)$ του $2+i$.



Από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$8 \le |z-(14+6i)| \le 18$$

Που σημαίνει ότι οι εικόνες του z που την ικανοποιούν, περιέχονται στον κυκλικό δακτύλιο, ο οποίος καθορίζεται από τους κύκλους:

$$c_1: \quad K(14,6),\ \rho_1 = 8$$
$$c_2: \quad K(14,6),\ \rho_2 = 18$$

Παρατηρούμε ότι είναι:

$$(K\Lambda) = \sqrt{(14-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Με συνέπεια να ισχύουν:

$$(K\Lambda) = 5 + 8 = \rho + \rho_1 \quad (3)$$
$$(K\Lambda) = 18 - 5 = \rho_2 - \rho \quad (4)$$

Από την σχέση (3), όπως φαίνεται και στο σχήμα, ο κύκλος c εφάπτεται εξωτερικά του c_1, ενώ από την (4) προκύπτει ότι ο c εφάπτεται εσωτερικά του c_2. Έτσι λοιπόν γίνεται φανερό ότι οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1), ικανοποιούν και την (2).

3. Αν για τους μιγαδικού αριθμούς $z_1,\ z_2$ ισχύει:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| \quad (1)$$

με $|z_1| \neq 0$, να δειχθεί ότι:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}|z_1|$$

<u>Λύση:</u>

Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς, ισχύει:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \quad (2)$$

Απ' αυτή λόγω της (1), έχουμε:

$$|z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4|z_1|^2 \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2|^2 = 3|z_1| \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{|z_1 - z_2| = \sqrt{3}|z_1|}$$

Ασφαλώς διαπιστώσατε πόσο χρήσιμη είναι η σχέση (2).