13^{o} ΜΑΘΗΜΑ

3.6. Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων:

Τετραγωνικής ρίζας:

$$\left(\sqrt{g}\right)' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}, \quad g > 0$$

Δύναμης $\alpha \in \mathbb{R}$ **:**

$$\left(f^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$$

Εκθετικής με βάση e:

$$\left(e^{f}\right)' = e^{f} \cdot f'$$

Εκθετικής με βάση $\alpha \in \mathbb{R}^{*} - \{1\}$

$$\left(\alpha^{f}\right)' = \alpha^{f} \cdot f' \cdot \ell n\alpha$$

Λογαριθμικών:

$$\left(\ell nf\right)' = \frac{f'}{f}, \quad f > 0$$

$\alpha > 0, \quad \alpha \neq 1$

$$\left(\log_{\alpha} f\right)' = \frac{f'}{f \cdot \ell n\alpha}, \quad f > 0$$

Τριγωνομετρικών:

$$\left(\eta\mu f\right)' = f' \cdot \sigma\upsilon\nu f$$

$$\left(\sigma\upsilon\nu f\right)' = -f' \cdot \eta\mu f$$

$$\left(\varepsilon\varphi f\right)' = \frac{f'}{\sigma\upsilon\nu^{2} f} = f'\left(1 + \varepsilon\varphi^{2} f\right)$$

$$\left(\sigma\varphi f\right)' = \frac{-f'}{\eta\mu^{2} f} = -f'\left(1 + \sigma\varphi^{2} f\right)$$

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr

Εκθετικών:

Για τη συνάρτηση:

$$\left(3x^2+1\right)^{5x+6}=e^{(5x+6)\ell n\left(3x^2+1\right)}=e^{\omega}$$

έχω:

$$\left(\left(3x^2+1\right)^{5x+6}\right)'=e^{\omega}\omega'=\left(3x^2+1\right)^{5x+6}\left(5\ell n\left(3x^2+1\right)+(5x+6)\frac{6x}{3x^2+1}\right)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Η παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}=|x-2|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases}(x-2)^{\frac{2}{3}} & \alpha\nu \quad x>2\\ 0 & \alpha\nu \quad x=2\\ (2-x)^{\frac{2}{3}} & \alpha\nu \quad x<2\end{cases}$$

είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}.(x-2)'=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} & \alpha\nu \quad x>2\\ \frac{2}{3}(2-x)^{-\frac{1}{3}}.(2-x)'=-\frac{2}{3}(2-x)^{-\frac{1}{3}} & \alpha\nu \quad x<2\end{cases}$$

Στο σημείο 2 η δεδομένη συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.

3.7. ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Προκειμένου να προσδιορίσουμε παραγώγους, εφαπτόμενες εξισώσεων, κλαδικές κ.λ.π., εξυπηρετεί να εφαρμόζουμε τις οδηγίες που ακολουθούν:

❶ Αν η **f** είναι **κλαδική**, τότε και η $\mathbf{f'}$ θα είναι **κλαδική.** Εκεί όμως που αλλάζει ο τύπος, πρέπει υποχρεωτικά να βρίσκουμε την παράγωγο με τον ορισμό:

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

ή αν χρειάζεται $f_\alpha{}'(\xi)=f_\delta{}'(\xi)$. Επίσης πρέπει να βρίσκουμε και το πεδίο ορισμού της f'.

❷ Αν η **f** είναι κλαδική και ζητούνται τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η **f** να είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο ξ που αλλάζει ο τύπος, τότε λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις:

i. Η **f** είναι συνεχής στο ξ.

ii. $f'_\alpha(\xi)=f'_\delta(\xi)$

❸ Ισχύει ότι:

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi},\quad f''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi},$$

$$f'''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f''(x)-f''(\xi)}{x-\xi},\quad \text{κ.λ.π.}$$

❹ Ισχύει ότι:

$$\big(f(y)\big)'=f'(y)\cdot y',\quad \big(f(x)\big)'=f'(x),\quad f'(\xi)\neq\big(f(\xi)\big)'=0$$

όπου $y=g(x)$, άρα η $f(g)$ είναι σύνθεση.

❺ Αν η **f** είναι **εκθετική** της μορφής $e^f,\ \alpha^g,\ f^g,\ g^f$, τότε πριν παραγωγίσουμε, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$y=e^{\ell ny}$$

Προσοχή στο πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση:

$$f(x)=(x-1)^{3x-2}=e^{(3x-2)\ell n(x-1)}$$

Έχει πεδίο ορισμού, το διάστημα $(1,+\infty)$

❻ Αν η **f** είναι **λογαριθμική**, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων, αν το επιτρέπει το πεδίο ορισμού και μετά παραγωγίζουμε.

Παράδειγμα: Για τη συνάρτηση f με $x\in(-1,1)$ έχουμε:

$$f(x)=\ell n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\ell n(1-x)-\frac{1}{2}\ell n(1+x)$$

συνεπάγεται:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)'}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)'}{1+x} \quad \text{κ.λ.π.} \quad \text{με} \quad x\in(-1,1)$$

❼ Αν οι **f, g** είναι δυο συναρτήσεις που τα διαγράμματα τους έχουν κοινή εφαπτομένη **(ε)** σε σημείο επαφής ξ του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε ισχύουν:

i. $f(\xi)=g(\xi)$ **ii.** $f'(\xi)=g'(\xi)=\lambda_\varepsilon$

❽ Αν η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι δυο φορές **παραγωγίσιμη**, ισχύουν:

i. Η **f** είναι **άρτια** ⇒ Η **f′** είναι **περιττή** ⇒ Η **f″** είναι **άρτια** και ισχύει:

$$\boxed{f'(0)=0}$$

ii. Η **f** είναι **περιττή** ⇒ Η **f′** είναι **άρτια** ⇒ Η **f″** είναι **περιττή** και ισχύει:

$$\boxed{f''(0)=0}$$

❾ Αν υπάρχει **άκρο κλειστό** στο πεδίο ορισμού της **f** και δεν ορίζεται η **f′** από τους κανόνες, τότε πρέπει να εξετάζουμε με τον ορισμό την παράγωγο στο **άκρο.** Για παράδειγμα:

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\,/\,A=[0,+\infty)\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x & x>0 \\ f'(0)=0 & x=0\end{cases}$$

❿ Δεν παραγωγίζω ποτέ ανισότητες, ούτε ανισώσεις ή εξισώσεις. Για να παραγωγίσω, πρέπει να είναι:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Delta$$

Για παράδειγμα:

- Δεν παραγωγίζω την $5 > 3$, διότι γίνεται $0 > 0$ που είναι αδύνατο.
- Δεν παραγωγίζω την εξίσωση $\chi + 3 = 5$, διότι προκύπτει $1 = 0$ που είναι αδύνατο.

- Παραγωγίζω την:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

διότι ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Επίσης όταν έχω:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

τότε ισχύει:

$$f'(x) = g'(x)$$

Δεν ισχύει το αντίστροφο.

3.8. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3.8.1. Εξίσωση εφαπτομένης:

Η εξίσωση της ευθείας **(ε)** που εφάπτεται του διαγράμματος της f / A στο σημείο $x_o \in A$, δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

i. Αν υπάρχει η $f'(x_o) \in \mathbb{R}$, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boxed{y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)} \quad (1)$$

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(\chi) - f(x_o)}{\chi - x_o} = \pm\infty$ δηλαδή αν δεν υπάρχει η παράγωγος, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boxed{x = x_o} \quad (2)$$

iii. Αν η **f / A** είναι κλαδική στο σημείο $x_o \in A$ και στο σημείο αυτό ισχύει:

$$f'_{\alpha}(x_o) \neq f'_{\delta}(x_o)$$

Τότε **δεν υπάρχει** εφαπτομένη **(ε)** στο σημείο x_o.

Γωνιακό σημείο

3.8.2. <u>Εξίσωση κάθετης:</u>

Αν η ευθεία **(η)** είναι κάθετη στην **(ε)** $(\eta \perp \varepsilon)$, ακριβώς στο σημείο x_o, τότε η εξίσωση της **(η)**, είναι:

$$\boxed{y = f(x_o) - \frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)}$$

Αν βέβαια υπάρχει η $f'(x_o) \in \mathbb{R}^*$.

Στην περίπτωση που είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \pm\infty$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει παράγωγος, τότε:

$$\boxed{y = f(x_o)}$$

3.8.3. <u>Εφαπτομένη από σημείο:</u>

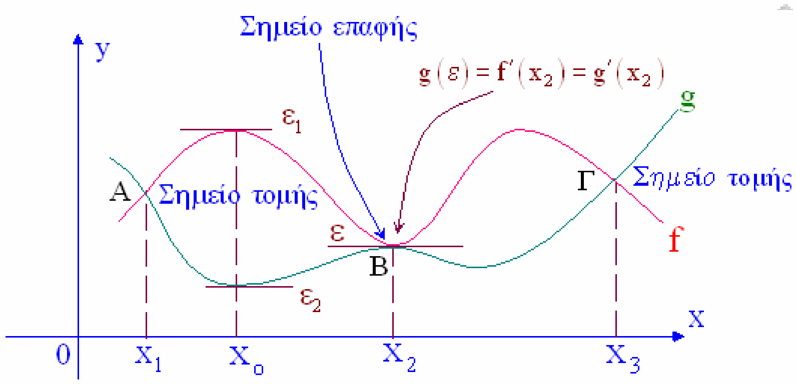
Η εφαπτομένη σε σημείο $(x_o, f(x_o))$ της C_f όταν διέρχεται από σημείο $M(\kappa, \lambda)$ επαληθεύει την σχέση:

$$\boxed{\lambda = f(x_o) + f'(x_o)(\kappa - x_o)}$$

Από τον τύπο αυτό, προσδιορίζουμε το σημείο x_o, αν είναι άγνωστο και το σημείο Μ είναι γνωστό.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΑΘΗΤΩΝ

3.9. ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



Όταν θέλουμε να βρίσκουμε τα **κοινά σημεία** δυο συναρτήσεων **f** και **g,** λύνουμε την εξίσωση:

$$\boxed{f(x)=g(x)} \quad (1)$$

Η λύση της (1), δίνει τις τετμημένες x_1, x_2, x_3 των σημείων τομής **Α, Β** και **Γ** των διαγραμμάτων των δυο συναρτήσεων.

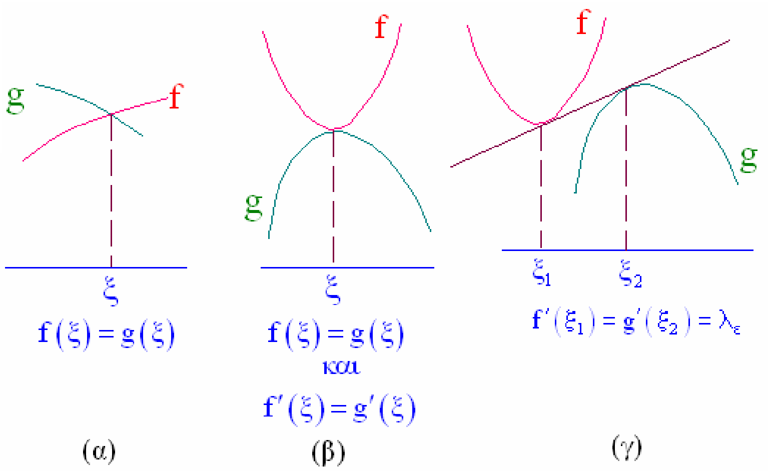
Αν **επί πλέον** θέλουμε τα **σημεία επαφής**, τότε λύνουμε και την εξίσωση:

$$\boxed{f'(x)=g'(x)} \quad (2)$$

Η κοινή λύση των (1) και (2), δίνει τα σημεία επαφής

Προσοχή: Η (1) μόνη της, δεν είναι **ικανή** να δώσει τα σημεία επαφής. Για παράδειγμα στα διαγράμματα (α) του σχήματος, η (1) δίνει το κοινό σημείο των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων. Η (2) μόνη της, όπως και η (1) δεν είναι ικανή να δώσει σημείο επαφής. Μπορεί να δώσει αν υπάρχει, την κοινή εφαπτομένη των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο διάγραμμα (γ) του σχήματος.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΑΘΗΤΩΝ



3.10. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Αν δυο μεγέθη x, y είναι μεταβλητά και συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση $y = f(x)$, που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε:

Η παράγωγος $f'(x_o)$ στο σημείο x_o ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_o.

3.11.1. Παράγωγοι γνωστοί από την φυσική:

- **Στιγμιαία ταχύτητα.**

$$\boxed{\upsilon(t_o) = S'(t_o) = \frac{dS}{dt} = \lim_{t\to t_o}\left(\frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o}\right)}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση.**

$$\boxed{\alpha(t_o) = \upsilon'(t_o) = \frac{d\upsilon}{dt} = \lim_{t\to t_o}\left(\frac{\upsilon(t)-\upsilon(t_o)}{t-t_o}\right)}$$

- **Ένταση ρεύματος.**

$$\boxed{I(t_o) = Q'(t_o) = \frac{dQ}{dt} = \lim_{t\to t_o}\left(\frac{Q(t)-Q(t_o)}{t-t_o}\right)}$$

- **Γωνιακή ταχύτητα.**

$$\boxed{\omega(t_o) = \theta'(t_o) = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{t\to t_o}\left(\frac{\theta(t)-\theta(t_o)}{t-t_o}\right)}$$

και

$$\boxed{\omega(t_o) = \frac{\upsilon(t_o)}{R}}$$

3.11.2. <u>Τυπολόγιο γεωμετρίας.</u>

<u>Όγκος σφαίρας:</u> $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

<u>Επιφάνειας σφαίρας:</u> $\boxed{E = 4\pi r^2}$

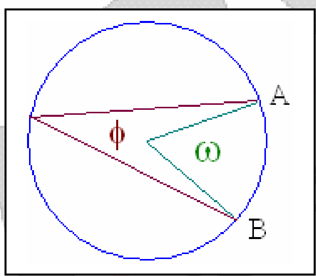
<u>Μήκος κύκλου:</u> $\boxed{L = 2\pi R}$

<u>Μήκος τόξου μ^o:</u> $\boxed{l = \frac{\pi R.\mu^o}{180^o}}$

<u>Σχέσεις τόξου γωνίας:</u>

Σε μοίρες

$\boxed{\overset{\frown}{AB} = 2\hat{\phi} = \hat{\omega}}$



Σε ακτίνια

$\boxed{\overset{\frown}{AB} = R\omega}$

<u>Όγκος κυλίνδρου:</u> $\boxed{V = \pi R^2 \upsilon}$

<u>Όγκος κώνου:</u> $\boxed{V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}}$