12^{o} ΜΑΘΗΜΑ

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1. Έννοια της παραγώγου

Ορισμός:

Αν f/A είναι μια συνάρτηση και $x_o \in A$, ονομάζεται **παράγωγος της** f **στο σημείο** x_o και συμβολίζεται $f'(x_o)$, το όριο:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right) \in \mathbb{R} \quad \textbf{(1)}$$

εφόσον βέβαια υπάρχει και ανήκει στο $\mathbb{R}$.

Θέτοντας $h = x - x_o$, η σχέση (1), γίνεται:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad \textbf{(2)}$$

2ος ορισμός

Πλευρική παράγωγος στο x_0

Το όριο $\lim_{x \to x_o^+}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right) \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **δεξιά παράγωγος** στο x_o^+.

Το όριο $\lim_{x \to x_o^-}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right) \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **αριστερή παράγωγος** στο x_o^-.

Για να είναι μια συνάρτηση f/A **παραγωγίσιμη στο** $x_o \in A$, πρέπει να υπάρχει η $f'(x_o)$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x \to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

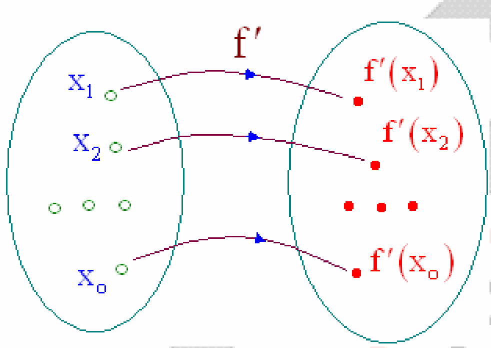
που συμβολίζεται:

$$f_\delta'(x_o) = f_\alpha'(x_o) \in \mathbb{R}$$

Ορισμός:

Αν f/A είναι μια συνάρτηση, ονομάζεται παράγωγος συνάρτηση της f ή απλά παράγωγος της f στο Α και συμβολίζεται $f'(x)$, μια νέα συνάρτηση η οποία προέρχεται από την f και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)=f'(x_o) \qquad \forall x_o\in A$$



Παραδείγματα:

1. **Αν $f(x)=3x^2+2/\mathbb{R}$, να βρεθούν τα $f'(1),\ f'(3),\ f'(-2),\ f'(0)$.**

Λύση: Ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)=f'(x_o) \qquad \forall x_o\in A$$

Στη σχέση αυτή αν θέσω $f(x)=3x^2+2$, έχω:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(3x^2+2)-(3x_o^{\ 2}+2)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{3(x^2-x_o^{\ 2})}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{3(x+x_o)(x-x_o)}{x-x_o}=6x_o \qquad \Rightarrow \qquad f'(x_o)=6x_o$$

Που σημαίνει ότι:

$$\boxed{f'(x_o)=6x_o \qquad \forall x_o\in\mathbb{R}}$$

Επομένως:

$$\boxed{f'(1)=6,\quad f'(3)=18,\ f'(-2)=-12,\ f'(0)=0}$$

2. **Αν**

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{αν } x\le 0\\ ημx & \text{αν } x>0\end{cases}$$

Να βρεθούν τα $f'(2),\ f'(-1),\ f'(0)$

<u>Λύση:</u> Παρατηρώ ότι:

$x-2=h\to 0$

i $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{ημx-ημ2}{x-2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{ημ(2+h)-ημ2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ημ2συνh+συν2ημh-ημ2}{h}=$$

$\to 1$

$$\lim_{h\to 0}\left(ημ2\left(\frac{συνh-1}{h}\right)+συν2\left(\frac{ημh}{h}\right)\right)=συν2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(2)=συν2}$$

$\to 0$

ii. $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(3x^2+1\right)-\left(3(-1)^2+1\right)}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3\left(x^2-1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}3\left(x-1\right)=-6 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(-1)=-6}$$

iii. $$f'_δ(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx-1}{x}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$f'_α(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}3x=3\cdot 0=0$$

Άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$, δηλαδή η **f** στο $x_o=0$ **δεν είναι παραγωγίσιμη.**

3.2. Παραγώγιση και συνέχεια.

Θεώρημα: Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_o \in A$, είναι υποχρεωτικά και συνεχής στο x_o.

1η σημείωση: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_o \in A$, δεν είναι **απαραίτητα** και παραγωγίσιμη στο x_o.

2η σημείωση: Αν η συνάρτηση **δεν είναι** συνεχής στο $x_o \in A$, τότε δεν θα είναι **ούτε** παραγωγίσιμη στο x_o. Είναι αυτονόητο, διότι αν είναι παραγωγίσιμη, τότε είναι και συνεχής.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \alpha\nu \quad x > 1 \\ x^2 & \alpha\nu \quad x \le 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

Λύση: **i.** Κατ' αρχήν η συνάρτηση **f** πρέπει να είναι συνεχής στο **x_0=1.**
Αυτό σημαίνει ότι:

$$\lim_{x \to 1^+}(\alpha x + \beta) = \lim_{x \to 1^-} x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 1^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\alpha + \beta = 1} \quad (1)$$

ii. Πρέπει ακόμα να είναι:

$$f'_\delta(1) = f'_\alpha(1)$$

$$\boxed{\alpha+\beta=1}$$

Επειδή:

$$f'_\alpha(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

και

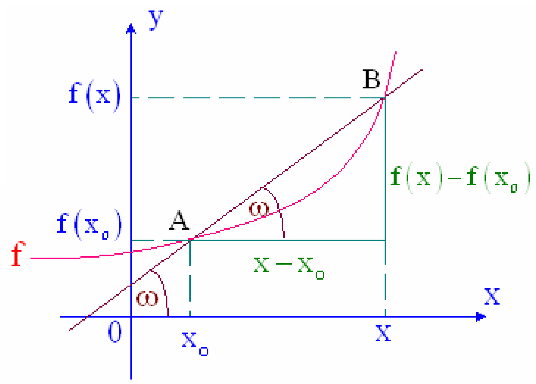
$$f'_\delta(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{(\alpha x + \beta) - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\alpha x + \beta) - (\alpha + \beta)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\alpha(x - 1)}{x - 1} = \alpha$$

Άρα:

$$\boxed{\alpha = 2} \quad \text{και} \quad \boxed{\beta = -1}$$

3.3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ



Αν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης **f** θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο $A(x_o, f(x_o))$ και κάποιο μεταβλητό σημείο $B(x, f(x))$, τότε η **ΑΒ** είναι **χορδή** της καμπύλης και έχει συντελεστή διευθύνσεως λ_{AB}, που είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{AB} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Παρατηρούμε ότι όταν:

$$x \to x_o$$

τότε και το σημείο **Β** τείνει να ταυτιστεί με το **Α** $(A \equiv B)$. Στην περίπτωση αυτή η χορδή **ΑΒ**, γίνεται πλέον εφαπτομένη (ε) της καμπύλης της **f.** Στο σημείο x_o η εφαπτομένη (ε), θα έχει συντελεστή διευθύνσεως λ_ε, το όριο του κλάσματος:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

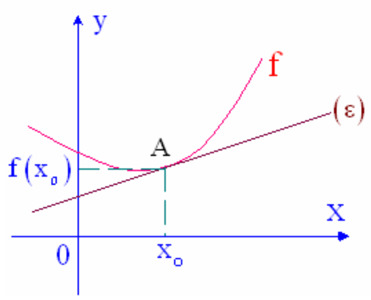
ΚΛΙΣΗ της f στο x_o

Δηλαδή:

$$\lambda_\varepsilon = \lim_{x \to x_o}\left(\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right) = f'(x_o)$$ Εφ' όσον υπάρχει και είναι στο $\mathbb{R}$

Επομένως γεωμετρικά η παράγωγος συνάρτησης f στο σημείο x_o, εκφράζει τον συντελεστή διεύθυνσης λ_ε της εφαπτομένης (ε) της καμπύλη της f στο σημείο x_o.

Η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** στο σημείο x_o είναι:



$$\boxed{y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)} \quad \textbf{(1)}$$

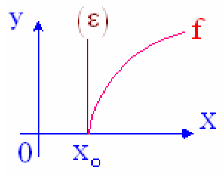
όταν υπάρχει η $f'(x_o) \in \mathbb{R}$.

Αν είναι:

$$\lim_{x \to x_o}\left(\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right) = +\infty \quad ή \quad -\infty$$

τότε ορίζουμε:

$\boxed{\varepsilon : x = x_o}$



3.4.1. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Απλές συναρτήσεις:		**Παράγωγοι αυτών:**
$f(x)=c$	$\Rightarrow$	$f'(x)=0 / \mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=1 / \mathbb{R}$
$f(x)=\alpha x+\beta$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\alpha / \mathbb{R}$
$f(x)=x^{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*,$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\nu \cdot x^{\nu-1} / \mathbb{R}$
$f(x)=x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} / \mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2} / \mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt[\kappa]{x}, \quad \kappa \in \mathbb{N}^*-\{-1\}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{\kappa\sqrt[\kappa]{x^{\kappa-1}}} / \mathbb{R}_+^*$
$f(x)=e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=e^x / \mathbb{R}$
$f(x)=\ell nx$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{x} / (0,+\infty)$
$f(x)=\ell n\lvert x\rvert$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{x} / \mathbb{R}^*$
$f(x)=\log_{\alpha} x, \quad \alpha>0, \quad \alpha \neq 1$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{x \cdot \ell n\alpha} / \mathbb{R}^*_+$
$f(x)=\alpha^x, \quad \alpha>0, \quad \alpha \neq 1$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\alpha^x \ell n\alpha / \mathbb{R}$
$f(x)=\eta\mu x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x / \mathbb{R}$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=-\eta\mu x / \mathbb{R}$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\varphi^2 x$
$f(x)=\sigma\varphi x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\eta\mu^2 x}=-\left(1+\sigma\varphi^2 x\right)$
$f(x)=x^x, \quad x>0$	$\Rightarrow$	$f'(x)=x^x\left(1+\ell nx\right) / \mathbb{R}_+^*$
$f(x)=e^{-x}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=-e^{-x}$

3.4.2. ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Αθροίσματος:

$$(f+g)' = f' + g'$$

Γινομένου:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Σταθερά επί συνάρτηση:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

Συμμετρικής:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

Πηλίκου:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Δύναμης φυσικού $\kappa \in \mathbb{N}^*$**:**

$$\left(f^k\right)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ $f(x)=y$

$f'(x)=\frac{df}{dx}$ $f'(3)=\left.\frac{df}{d\chi}\right|_{x=3}$

$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$ $f''(5)=\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=5}$

$f'''(x)=\frac{d^3f}{dx^3}$ $f'''(7)=\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=7}$

…

$f^{(\nu)}(x)=\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$ **κ.λ.π.**