Επιμέλεια: Σκουφά Σωτήρη
Βούρβαχη Κώστα

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός:

Έστω f μια συνάρτηση, **συνεχής** σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Στο διάστημα αυτό, έχει γίνει **διαμέριση** σε **ν** ίσα διαστήματα **πλάτους** $d\nu=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Η **διαμέριση** μπορεί να γίνει και με τα σημεία $x_o, x_1, x_2, ..., x_\kappa, ...$ και τότε **το πλάτος** του κάθε διαστήματος, είναι $d\nu = x_\kappa - x_{\kappa-1}$. Τα διαστήματα, δεν είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο πλάτος.

Ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το α μέχρι το β και το συμβολίζουμε $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, το παρακάτω όριο:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa).d\nu$$

Δηλαδή ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa).d\nu$$

Έστω το διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τα σημεία $x_o, x_1, x_2, ..., x_\kappa, ..., x_\nu$ μέσα σ' αυτό, που το διαμερίζουν σε διαστήματα, πλάτους:

$$d\nu=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

Παρατηρούμε ότι είναι:

$$x_o = \alpha$$
$$x_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\nu}$$
$$x_2 = \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{\nu}$$
$$\cdots$$
$$x_\kappa = \alpha + \kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}$$
$$\cdots$$
$$x_\nu = \alpha + \nu\frac{\beta-\alpha}{\nu} = \beta$$

Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα με την μέθοδο **Riemann** (ορισμός), χρησιμοποιούμε διαμέριση σε **ν ίσα** διαστήματα, πλάτους:

$$d\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

με συνέπεια να έχουμε τον τύπο:

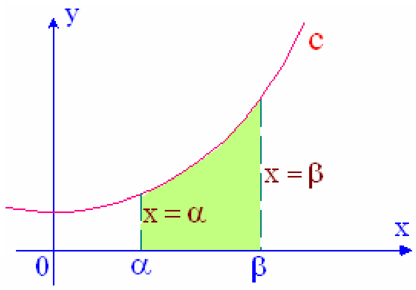
$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)}$$

◈ ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

❶ Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, εξαρτάται από την συνάρτηση f και τα άκρα α και β, όπου η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Δεν εξαρτάται από την μεταβλητή x. Δηλαδή ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \ldots$$

❷ Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα, εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στο διάγραμμα c της f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



❸ $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

❹ $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

❺ $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$

⁂ **<u>Γραμμικότητα ολοκληρώματος</u>**

Για συνεχείς συναρτήσεις στο $\Delta = [\alpha, \beta]$, ισχύουν οι ιδιότητες:

① $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

② $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ **σχέση chasles**

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των α, β, γ.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αν f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

❶ Αν $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta] \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$

❷ Αν $f(x)\geq g(x) \quad \forall x\in[\alpha,\beta] \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx\geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$

❸ Εφ' όσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f θα έχει ολικά ακρότατα, έστω $m=$ ολικό ελάχιστο και $M=$ ολικό μέγιστο στο $[\alpha,\beta]$ και θα ισχύει:

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=(\beta-\alpha)f(\xi)$$

Θ.Μ.Τ. στα ολοκληρώματα

⁂ **<u>Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.</u>**

Το εμβαδόν του χωρίου που παριστάνει το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, με $f(x) \geq 0$, ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει διαστάσεις $\beta - \alpha$ και $f(\xi)$.