Επιμέλεια: Σκουφά Σωτήρη
Βούρβαχη Κώστα

◈ Κατηγορίες ολοκληρωμάτων

⁂ Α. Ρητά ολοκληρώματα:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{2x+3}{x^3-5x^2+6x}\right)dx,\quad \int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{2x^2+6x+10}{2x+3}\right)dx,\quad \int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+3}\right)dx$$

Κατ' αρχήν, προσπαθούμε να κάνουμε απλοποίηση, εφ' όσον γίνεται. Στην συνέχεια:

① Όταν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μικρότερος ή ίσος από τον βαθμό του αριθμητή, κάνω διαίρεση πολυωνύμων και έχω:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2x^2+6x+10}{2x+3}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x+1)(2x+3)+x+7}{2x+3}dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left(x+1+\frac{x+7}{2x+3}\right)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta}(x+1)d\chi+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x+7}{2x+3}dx=\ldots$$

② Όταν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή και ακόμα **μπορεί** ο παρονομαστής να γίνει **γινόμενο παραγόντων**, τότε κάνουμε σπάσιμο κλάσματος:

$$\frac{2x+3}{x^3-5x^2+6x}=\frac{2x+3}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{x-3}$$

με Α, Β, Γ προσδιοριστέους συντελεστές.

③ Όταν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή, όμως ο παρονομαστής **δεν μπορεί να γίνει γινόμενο παραγόντων 1ου βαθμού**, τότε έχουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

α. Όταν ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή, τότε έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'}{f}dx=\left[\ell n|f|\right]_{\alpha}^{\beta}$$

β. Όταν δεν συμβαίνει αυτό, τότε τρέπουμε τον παρονομαστή σε άθροισμα τετραγώνων ή σε τέλειο τετράγωνο.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x+3}{x^2+4x+5}\right)dx$$

Λύση: Παρατηρώ ότι:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x+6}{x^2+4x+5}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x+4+2}{x^2+4x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}d\chi+\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ell n\left(x^2+4x+5\right)\right]_{-2}^{-1}+I_1$$

Βρίσκω το I_1, ως εξής:

$$I_1=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+1}=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1}$$

Θέτω $x+2=\varepsilon\varphi\omega$ και παρατηρώ ότι:

όταν $x=-2 \Rightarrow \omega=0$ και $x=-1 \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{4}$

Ενώ από την ισότητα $x=-2+\varepsilon\varphi\omega$, έχω:

$$dx=\left(-2+\varepsilon\varphi\omega\right)'d\omega \quad \Leftrightarrow \quad dx=\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega\right)d\omega$$

Άρα:

$$I_1=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1}=\int_{0}^{\pi/4}\frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}d\omega=\int_{0}^{\pi/4}1\cdot d\omega=\left[\omega\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}$$

Επομένως:

$$I=\frac{1}{2}\left(\ell n2-\ell n1\right)+\frac{\pi}{4}=\ell n\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}$$