Επιμέλεια: Σκουφά Σωτήρη
Βούρβαχη Κώστα

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Προκειμένου να προσδιορίσουμε παραγώγους, εφαπτόμενες εξισώσεων, κλαδικές κ.λ.π., εξυπηρετεί να εφαρμόζουμε τις οδηγίες που ακολουθούν:

❶ Αν η **f** είναι **κλαδική**, τότε και η **f'** θα είναι **κλαδική.** Εκεί όμως που αλλάζει ο τύπος, πρέπει υποχρεωτικά να βρίσκουμε την παράγωγο με τον ορισμό:

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ή αν χρειάζεται $f_\alpha'(\xi) = f_\delta'(\xi)$. Επίσης πρέπει να βρίσκουμε και το πεδίο ορισμού της f'.

❷ Αν η **f** είναι κλαδική και ζητούνται τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η **f** να είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο ξ που αλλάζει ο τύπος, τότε λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις:

i. Η **f** είναι συνεχής στο ξ.

ii. $f_\alpha'(\xi) = f_\delta'(\xi)$

❸ Ισχύει ότι:

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \quad f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi},$$

$$f'''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f''(x) - f''(\xi)}{x - \xi}, \quad \text{κ.λ.π.}$$

❹ Ισχύει ότι:

$$\big(f(y)\big)' = f'(y) \cdot y', \quad \big(f(x)\big)' = f'(x), \quad f'(\xi) \neq \big(f(\xi)\big)' = 0$$

όπου $y = g(x)$, άρα η $f(g)$ είναι σύνθεση.

❺ Αν η **f** είναι **εκθετική** της μορφής e^f, α^g, f^g, g^f, τότε πριν παραγωγίσουμε, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$y = e^{\ell n y}$$

Προσοχή στο πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση:

$$f(x)=(x-1)^{3x-2}=e^{(3x-2)\ell n(x-1)}$$

Έχει πεδίο ορισμού, το διάστημα $(1,+\infty)$

❻ Αν η **f** είναι **λογαριθμική**, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων, αν το επιτρέπει το πεδίο ορισμού και μετά παραγωγίζουμε.

Παράδειγμα: Για τη συνάρτηση f με $x\in(-1,1)$ έχουμε:

$$f(x)=\ell n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\ell n(1-x)-\frac{1}{2}\ell n(1+x)$$

συνεπάγεται:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)'}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)'}{1+x}\quad \text{κ.λ.π.}\quad \text{με}\quad x\in(-1,1)$$

❼ Αν οι **f, g** είναι δυο συναρτήσεις που τα διαγράμματα τους έχουν κοινή εφαπτομένη **(ε)** σε σημείο επαφής **ξ** του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε ισχύουν:

i. $f(\xi)=g(\xi)$ **ii.** $f'(\xi)=g'(\xi)=\lambda_\varepsilon$

❽ Αν η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι δυο φορές **παραγωγίσιμη**, ισχύουν:

i. Η **f** είναι ***άρτια*** ⇒ Η **f′** είναι ***περιττή*** ⇒ Η **f″** είναι ***άρτια*** και ισχύει:

$$\boxed{f'(0)=0}$$

ii. Η **f** είναι ***περιττή*** ⇒ Η **f′** είναι ***άρτια*** ⇒ Η **f″** είναι ***περιττή*** και ισχύει:

$$\boxed{f''(0)=0}$$

❾ Αν υπάρχει ***άκρο κλειστό*** στο πεδίο ορισμού της **f** και δεν ορίζεται η **f′** από τους κανόνες, τότε πρέπει να εξετάζουμε με τον ορισμό την παράγωγο στο ***άκρο***. Για παράδειγμα:

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\,/\,A=[0,+\infty)\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x & x>0\\ f'(0)=0 & x=0\end{cases}$$

❿ Δεν παραγωγίζω ποτέ ανισότητες, ούτε ανισώσεις ή εξισώσεις. Για να παραγωγίσω, πρέπει να είναι:

$$f(x)=g(x)\qquad \forall x\in\Delta$$

Για παράδειγμα:

- Δεν παραγωγίζω την $\mathbf{5>3}$, διότι γίνεται $\mathbf{0>0}$ που είναι αδύνατο.

▪ Δεν παραγωγίζω την εξίσωση $\chi+3=5$, διότι προκύπτει $1=0$ που είναι αδύνατο.

■ Παραγωγίζω την:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

διότι ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■ Επίσης όταν έχω:

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

τότε ισχύει:

$$f'(x) = g'(x)$$

Δεν ισχύει το αντίστροφο.