ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr

fast & easy

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Τυπολόγιο & Μεθοδολογία

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γραμμικό σύστημα $m\times n$ λέγεται ένα πλήθος m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις.
Η λέξη «**γραμμικό**» δηλώνει ότι όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι πρώτου βαθμού ως προς τους αγνώστους.

π.χ. 1 2×2 Γραμμικό σύστημα :

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1\\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}\quad ή \quad \boxed{A\vec{x}=\vec{b}}$$

όπου α_i, β_i, $\gamma_i \in R$, A 2×2 πίνακας και $\vec{x}$, $\vec{b}$ πίνακες στήλη 2×1.

π.χ. 2 3×3 Γραμμικό σύστημα :

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\delta_1\\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta_2\\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z=\delta_3\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}\quad ή \quad \boxed{A\vec{x}=\vec{b}}$$

όπου α_i, β_i, γ_i, $\delta_i \in$ R, A 3×3 πίνακας και $\vec{x}$, $\vec{b}$ πίνακες στήλη 3×1.

Παρατηρούμε ότι το σύστημα με τη χρησιμοποίηση πινάκων ισοδυναμεί με εξίσωση. Γι΄ αυτό οι μεθοδολογίες επίλυσής του βασίζονται στην αντίστοιχη θεωρία.

Λύση ενός $m\times n$ γραμμικού συστήματος λέγεται κάθε διατεταγμένη n – άδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις.

Μερική (μία) λύση ενός συστήματος λέγεται κάθε διάνυσμα $\vec{x}_\mu=(x_1,x_2,...,x_n)^T\in R^n$ που ικανοποιεί το σύστημα: $A\vec{x}_\mu=\vec{b}$

Γενική λύση (χώρος λύσεων) καλείται το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος.

Συμβιβαστό λέγεται ένα σύστημα εξισώσεων που έχει μία τουλάχιστον λύση.

Αδύνατο λέγεται ένα γραμμικό σύστημα που δεν έχει λύση.

Ομογενές ονομάζεται το γραμμικό σύστημα του οποίου οι σταθεροί όροι είναι όλοι ίσοι με μηδέν.

Σχόλιο: Τα ομογενή συστήματα είναι πάντοτε συμβιβαστά, καθώς έχουν προφανή (τετριμμένη) λύση τη μηδενική.

Παραμετρικό λέγεται το γραμμικό σύστημα του οποίου οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι μπορεί να είναι μεταβλητές (παράμετροι), π.χ. λ, μ.

π.χ. $\left.\begin{aligned}-3x+5y=0\\ 5x-8y=0\end{aligned}\right\}$, $\left.\begin{aligned}x+3\lambda y=\lambda-4\\ 2\lambda x-y=\lambda+1\end{aligned}\right\}$

ομογενές παραμετρικό

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss ή του **επαυξημένου πίνακα** επιδιώκουμε:
α) να καταλήξουμε στον ελάχιστο δυνατό αριθμό εξισώσεων και
β) να προκύψουν εξισώσεις με όσο το δυνατόν περισσότερους μηδενικούς συντελεστές.

Επαυξημένος πίνακας ενός $m\times n$ γραμμικού συστήματος $A\vec{x}=\vec{b}$ ονομάζεται ο πίνακας που έχει στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων και των σταθερών όρων.
Όπως προαναφέραμε το σύστημα ανάγεται με τη βοήθεια πινάκων σε εξίσωση. Για το λόγο αυτό, αντί των εξισώσεων του συστήματος χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα.

π.χ. Για το 3×3 γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}x+3y+4z&=6\\ 3x+10y-10z&=-3\qquad (\Sigma)\\ -2x-4y+11z&=9\end{aligned}$$

ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 4 & 6\\ 3 & 10 & -10 & -3\\ -2 & -4 & 11 & 9\end{array}\right]$$

Σχόλιο: Οι πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του **(Σ)** για την απαλοιφή των αγνώστων εκτελούνται αντίστοιχα μεταξύ των γραμμών του επαυξημένου πίνακα **(γραμμοπράξεις)**.

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss :

Βήμα 1° Με <u>εναλλαγή των γραμμών - εξισώσεων</u> γράφουμε πρώτη γραμμή αυτή που έχει στον πρώτο άγνωστο τον πιο απλό μη μηδενικό συντελεστή (συνήθως μονάδα).

Βήμα 2° Με οδηγό την πρώτη γραμμή - εξίσωση <u>απαλείφουμε τον ίδιο άγνωστο</u> (π.χ. το x) από όλες τις άλλες εξισώσεις. Συγκεκριμένα πολλαπλασιάζουμε την ή τις γραμμές – εξισώσεις με αριθμό τέτοιο που αν τις προσθέσουμε να απαλείφεται ο αντίστοιχος άγνωστος. Αν εμφανιστεί γραμμή $0,0,\ldots,0=0$ τότε αυτή παραλείπεται.

Βήμα 3° Με αφετηρία τη δεύτερη εξίσωση εκτελούμε τα βήματα **1°** , **2°** , κ.ο.κ.

π.χ. Για το παραπάνω σύστημα έχουμε :

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 4 & 6\\ 3 & 10 & -10 & -3\\ -2 & -4 & 11 & 9\end{array}\right]\quad\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 4 & 6\\ 0 & 1 & -22 & -21\\ 0 & 2 & 19 & 21\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 70 & 69\\ 0 & 1 & -22 & -21\\ 0 & 0 & 63 & 63\end{array}\right]\div 63\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 70 & 69\\ 0 & 1 & -22 & -21\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Η εμφάνιση μηδενικών στοιχείων κάτω και πάνω από την κύρια διαγώνιο λέγεται **κλιμακοποίηση** του συστήματος ή του επαυξημένου πίνακα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

ΑΔΥΝΑΤΟ όταν οι συντελεστές όλων των όρων μιας εξίσωσης είναι 0, ενώ ο σταθερός της όρος διάφορος του 0, δηλ. $0=\alpha$.

ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ όταν ο αριθμός των αγνώστων n είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων k **που απομένουν** $(n=k)$.

ΑΠΕΙΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ όταν ο αριθμός των αγνώστων n είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων k **που απομένουν** $(n>k)$, δηλαδή $m=n-k$ ελεύθεροι άγνωστοι.

ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMMER (ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ)

Η μέθοδος Crammer εφαρμόζεται σε $n\times n$ γραμμικά συστήματα $A\vec{x}=\vec{b}$. Εφόσον ο A^{-1} υπάρχει, τότε από τη θεωρία πινάκων για το σύστημα έχουμε τη μοναδική λύση :

$$A^{-1}A\,\vec{x}=A^{-1}\,\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \boxed{\vec{x}=A^{-1}\vec{b}}$$

Θυμίζουμε : ο A^{-1} υπάρχει $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

Μοναδική λύση με τη μέθοδο Crammer

α) Για το 2×2 γραμμικό σύστημα **(1)**, με $|A|\neq 0$, έχουμε:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}\quad και\quad y=\frac{|A_y|}{|A|}\quad όπου:$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix},\ |A_x|=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix},\ |A_y|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$$

β) Για το 3×3 γραμμικό σύστημα **(2)**, με $|A|\neq 0$, έχουμε:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|},\quad y=\frac{|A_y|}{|A|}\quad και\quad z=\frac{|A_z|}{|A|}\quad όπου:$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix},\quad |A_x|=\begin{vmatrix}\delta_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\quad και\quad |A_z|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3\end{vmatrix}$$

MODA: Η τιμή της ορίζουσας $|A|$ καθορίζει το είδος της λύσης του συστήματος:
α) Όταν $|A|\neq 0$ έχουμε **μοναδική λύση** που βρίσκεται με τη μέθοδο Crammer.
β) Όταν $|A|=0$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και αν προκύψει:
β₁) γραμμή $[0.......0\ \vdots\ \alpha]$ με $\alpha\neq 0$ είναι αδύνατο
β₂) αριθμός αγνώστων n>αριθμό εξισώσεων k τότε έχουμε **απειρία λύσεων (αόριστο)** με n-k ελεύθερους αγνώστους.

ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. $n\times n$ ομογενή συστήματα $A\vec{x}=0$ **:**
Κάθε ομογενές σύστημα έχει προφανή λύση τη μηδενική (τετριμμένη λύση).
Η ορίζουσα $|A|$ καθορίζει το είδος της λύσης:
α) Όταν $|A|\neq 0$, έχουμε **μοναδική λύση τη μηδενική**.

β) Όταν $|A| = 0$ έχουμε **άπειρες λύσεις**, αφού οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι λιγότερες από τους αγνώστους. Η εύρεση του χώρου των λύσεων γίνεται με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

π.χ.
$$\begin{aligned} 3x - 2\lambda y &= 0 \\ x + (4-\lambda)y &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2\lambda \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 12 - \lambda \ , \quad \lambda = 12 \text{ ρίζα}$$

α) Αν $\lambda \neq 12$ τότε $|A| \neq 0$.

Το **(Σ)** έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

β) Αν $\lambda = 12$ τότε $|A| = 0$.

Οπότε :
$$\begin{aligned} 3x - 24y &= 0 \\ x - 8y &= 0 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad x = 8y$$

Άρα (x,y) = (8y,y)=y(8,1), δηλ. μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.

2. $n \times m$ ομογενή συστήματα:
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss όπως **1β**.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Για $n \times n$ παραμετρικά συστήματα:
Το είδος της λύσης του παραμετρικού συστήματος εξαρτάται από τις ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ της εξίσωσης |A|=0.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Όταν $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_i$ τότε $|A| \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β) Όταν $\lambda = \lambda_i$ τότε |A| = 0. Για κάθε μια τιμή λ_i παίρνουμε το αντίστοιχο σύστημα και το λύνουμε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και θα προκύψει σύστημα **αόριστο** ή **αδύνατο**.

π.χ.
$$\begin{aligned} (1-\lambda)x - 2\lambda y &= 2 \\ 2\lambda x + (\lambda - 1)y &= \lambda - 4 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

και έχει ρίζες $\lambda = -1$, $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

α) Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq \dfrac{1}{3}$ τότε $|A| \neq 0$

και το **(Σ)** έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2\lambda^2 - 6\lambda - 2}{3\lambda^2 + 2\lambda - 1}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 4}{3\lambda^2 + 2\lambda - 1}$$

β) Αν $\lambda = -1$ τότε $|A| = 0$.

Οπότε :
$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2 \\ -2x - 2y &= -5 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 2 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

Το **(Σ)** είναι αδύνατο.

γ) Αν $\lambda = \dfrac{1}{3}$ τότε $|A| = 0$.

Οπότε :
$$\left.\begin{aligned} (2/3)x - (2/3)y &= 2 \\ (2/3)x - (2/3)y &= -11/3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$2 = -11/3$ άρα το **(Σ)** είναι αδύνατο.

2. Για $n \times m$ παραμετρικά συστήματα:
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ
(Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα)

Η σχέση $T(x_1, x_2) = A\vec{x} = \vec{y}$ δηλώνει ένα γραμμικό μετασχηματισμό από το διάνυσμα $\vec{x}$ στο $\vec{y}$. Για παράδειγμα:

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \vec{y}$$

Ζητάμε τα διανύσματα $\vec{x}$ που έχουν εικόνα **συγγραμμική** (ανάλογη) προς αυτά:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \ \Rightarrow \ \boxed{(A - \lambda I)\vec{x} = 0} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ιδιοτιμή ενός $n \times n$ πίνακα A καλείται κάθε τιμή του $\lambda \in R$ που ικανοποιεί την **(1)**.
Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda = \lambda_i$ λέγεται κάθε διάνυσμα $\vec{x} \neq 0$ που επαληθεύει την **(1)**.

- Για $\mu \in R^*$ τα $\mu \cdot \vec{x}$ είναι ιδιοδιανύσματα.

Εύρεση χαρακτηριστικών μεγεθών :
Το παραμετρικό ομογενές σύστημα **(1)** έχει λύσεις όταν $|A - \lambda I| = 0$

1ον Οι ιδιοτιμές λ_i είναι οι ρίζες της εξίσωσης $|A - \lambda I| = 0$.

2ον Για $\lambda = \lambda_i$ τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}_i$ είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_i = 0$.

Παρατηρήσεις:

1) Όταν η ιδιοτιμή είναι απλή ρίζα της εξίσωσης $|A - \lambda I| = 0$, τότε θα έχουμε βάση του ιδιοχώρου ένα και μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα.

2) Όταν η ιδιοτιμή είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $|A - \lambda I| = 0$, τότε θα έχουμε βαση με οπωσδήποτε ένα , ίσως και δεύτερο ιδιοδιάνυσμα.

3) Όταν προκύπτει μηδενικό ιδιοδιάνυσμα, τότε σίγουρα έχουμε κάνει λάθος.

4) Για να ελέγξουμε τα αποτελέσματά μας αρκεί να επαληθεύεται η $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$.

π.χ. Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Εύρεση ιδιοτιμών : $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$

Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων :

Για $\lambda_1 = 1$: $(A - I)\vec{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = x_2$$

Άρα $(x_1, x_2)^T = (x_1, 3x_1)^T = x_1(1,3)^T$ και $\vec{v}_1 = (1,3)^T$

Όμοια για $\lambda_2 = 2$ προκύπτει : $\vec{v}_2 = (1,2)^T$

ΘΕΩΡΗΜΑ GAYLEY – HAMILTON

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A λέγεται το: $\Phi(\lambda) = |A - \lambda I|$

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ισχύουν :

1ον $\Phi(0) = |A|$ (για $\lambda = 0$). *Συνεπώς από το $\Phi(0)$ υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A|$.*

2ον Αν αντί του λ θέσουμε τον πίνακα A προκύπτει η πολυωνυμική σχέση: $\Phi(A) = \mathbf{0}$ που είναι το **Θεώρημα Gayley-Hamilton.**

π.χ. Για τον πίνακα του παραπάνω παραδείγματος έχουμε: $\Phi(A) = \mathbf{0} \Rightarrow A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}$

Σχόλιο: Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου Φ(Α) πολλαπλασιάζεται με τον μοναδιαίο πίνακα Ι.

Εύρεση του αντίστροφου πίνακα A^{-1}
Όταν $|A| = \Phi(0) \neq 0$, ο A^{-1} υπολογίζεται από το Θεώρημα Gayley – Hamilton ως εξής:
Πολλαπλασιάζουμε την $\Phi(A) = \mathbf{0}$ με A^{-1}.

π.χ. Για τον πίνακα του παραπάνω παραδείγματος έχουμε: $A^{-1}(A^2 - 3A + 2I) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A - 3I + 2A^{-1} = \mathbf{0} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$$

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Λέμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι **διαγωνοποιήσιμος** όταν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα Δ. Δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$\boxed{P^{-1}AP = \Delta \quad \text{ή} \quad A = P\Delta P^{-1}}$$

Ο διαγώνιος πίνακας Δ είναι της μορφής $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ και ο πίνακας P έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Ο πίνακας A διαγωνοποιείται όταν:

- Έχει διαφορετικές ανά δύο (διακεκριμένες) ιδιοτιμές.
- Για κάθε ιδιοτιμή πολλαπλότητας k, προκύπτουν ακριβώς k – γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Είναι συμμετρικός, δηλ. $A^T = A$.

Δεν διαγωνοποιείται όταν:

- Σε ιδιοτιμή πολλαπλότητας k προκύπτουν λιγότερα από k – γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Έχει μιγαδικές ιδιοτιμές.

Μεθοδολογία διαγωνοποίησης

1ον Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

2ον Ελέγχουμε αν είναι διαγωνοποιήσιμος (βλέπε παραπάνω).

3ον Εφόσον ο A διαγωνοποιείται, γράφουμε μια διαγωνοποίησή του: $A = P\Delta P^{-1}$

Εύρεση ν-οστης δύναμης $n \times n$ πίνακα A

α) Αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται ισχύει: $A^\nu = P\Delta^\nu P^{-1}$ όπου $\Delta^\nu = \operatorname{diag}(\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \ldots, \lambda_n^\nu)$

β) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με διαίρεση ή υποβιβασμό τάξης.