ΠΙΝΑΚΕΣ - ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμοί

Λέμε $n\times m$ πίνακα Α, μία διάταξη $n\cdot m$ το πλήθος αριθμών, σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με n γραμμές και m στήλες.

• Το α_{ij} είναι το στοιχείο της i-γραμμής και της j-στήλης του πίνακα.

Ο πίνακας Α παριστάνεται με :

$$A \underset{\sigma\mu\beta}{=} \left[\alpha_{ij}\right] \underset{o\rho\sigma}{=} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

με $1\le i\le n$ (γραμμές), $1\le j\le m$ (στήλες)

• **Πίνακας στήλη** ονομάζεται ένας $n\times 1$ πίνακας Α με n γραμμές και μία στήλη.

• **Πίνακας γραμμή** ονομάζεται ένας $1\times n$ πίνακας Α με μία γραμμή και n στήλες.

• **Τετραγωνικός** ονομάζεται ένας $n\times n$ πίνακας Α όπου το πλήθος των γραμμών είναι ίσο με το πλήθος των στηλών.

• **Η κύρια διαγώνιος**, σ' έναν $n\times n$ τετραγωνικό πίνακα, σχηματίζεται από τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22},\ldots,\alpha_{nn}$ δηλ. τα α_{ij} με i=j.

• **Άνω τριγωνικός** ονομάζεται ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας Α όταν τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Σχόλιο : Απλά και εποπτικά τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα από την κύρια διαγώνιο και πάνω σχηματίζουν τρίγωνο. Όμοια ορίζεται ο **κάτω τριγωνικός** πίνακας.

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

άνω τριγωνικός κάτω τριγωνικός

• **Διαγώνιος** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας Α που όλα τα στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου είναι μηδέν.

• Δύο πίνακες $n\times m$ Α, Β είναι **ίσοι** όταν έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία τους και γράφουμε **Α=Β**.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1. Πρόσθεση πινάκων

Άθροισμα δύο $n\times m$ πινάκων, $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[\beta_{ij}]$, λέγεται ο $n\times m$ πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β.

Δηλαδή :

$$\boxed{A+B=[\alpha_{ij}+\beta_{ij}]}$$

Παρατήρηση: Δεν ορίζεται το άθροισμα διαφορετικού τύπου πινάκων. Διότι είναι σαν να τοποθετούμε δυο ορθογώνια διαφορετικών διαστάσεων, το ένα πάνω στο άλλο.

Ιδιότητες

• **Αντιμεταθετική**

Α+Β=Β+Α

• **Προσεταιριστική**

Α+(Β+Γ)=(Α+Β)+Γ

• **Μηδενικός πίνακας**

Ονομάζεται ο $n\times m$ πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν. Συμβολίζεται με **0** και ισχύει :

Α+**0**=**0**+Α=Α

• **Αντίθετος ενός πίνακα**

Ονομάζεται ο $n\times m$ πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι τα αντίθετα των στοιχείων του Α. Δηλ. $-A=[-\alpha_{ij}]$ και ισχύει:

Α+(-Α)=(-Α)+Α=**0**

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα Α λέγεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός και προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του Α με το λ, δηλαδή:

$$\lambda\cdot A=\lambda\cdot[\alpha_{ij}]=[\lambda\alpha_{ij}],\quad \lambda\in R$$

Ιδιότητες

1. $(\kappa+\lambda)\cdot A=\kappa\cdot A+\lambda\cdot A$, $\kappa,\lambda\in R$

2. $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

3. $\kappa(\lambda A)=\lambda(\kappa A)=(\kappa\lambda)A$

4. $1\cdot A=A$

3. Πολλαπλασιασμός πινάκων

Έστω Α ένας $n\times m$ πίνακας και Β ένας $m\times k$. Ορίζουμε γινόμενο του Α με τον Β τον $n\times k$ πίνακα ΑΒ του οποίου το γ_{ij} στοιχείο, προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του Α με την j-στήλη του Β.

$$A\cdot B=\Gamma=[\gamma_{ij}],\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le k$$

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\cdot\beta_{1j}+\alpha_{i2}\cdot\beta_{2j}+\ldots+\alpha_{im}\cdot\beta_{mj}$$

Παρατηρήσεις

1η Για να γίνει η πράξη του εσωτερικού γινομένου πρέπει το <u>μήκος της γραμμής</u> (αριθμός στηλών) του πίνακα Α να είναι <u>ίσο με το μήκος της στήλης</u> (αριθμός γραμμών) του Β.

<u>Σχηματικά</u> : Α Β → ΑΒ

$n\times\boxed{m \quad m}\times k \qquad n\times k$

π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 2 & -9 & 7 \\ 4 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Η δεύτερη γραμμή του ΑΒ προκύπτει από:

$4\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot2=2$, $4\cdot(-2)+0\cdot3+(-1)\cdot1=-9$

$4\cdot1+0\cdot4+(-1)\cdot(-3)=7$

2η Μπορεί να ορίζεται το γινόμενο ΑΒ δύο πινάκων και να μην ορίζεται το ΒΑ.

3η <u>Στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα,</u> διότι κι αν ακόμα ορίζονται τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ δεν έπεται αναγκαστικά ότι ΑΒ=ΒΑ.

Ιδιότητες

• **Προσεταιριστική**

Α(ΒΓ)=(ΑΒ)Γ

• **Επιμεριστική**

Α(Β+Γ)=ΑΒ+ΑΓ ή (Β+Γ)Α=ΒΑ+ΓΑ

• (λΑ) (μΒ)=(λμ)ΑΒ

Μοναδιαίος πίνακας

Ο $n\times n$ διαγώνιος πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με 1 και συμβολίζεται με I_n ονομάζεται **μοναδιαίος πίνακας,** δηλαδή :

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει: $\boxed{A\cdot I_n=I_n\cdot A=A}$

Ο πίνακας I_n συμβολίζεται απλούστερα με Ι.

• **Ίχνος** (trace) ενός $n\times n$ τετραγωνικού πίνακα Α ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου και συμβολίζεται **trA**:

$$\boxed{trA=\sum_{i=j=1}^{n}\alpha_{ij}=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn}}$$

Ιδιότητες

1. tr(λA+μB)=λtrA+μtrB $\lambda,\mu\in R$

2. tr(AB)=tr(BA)

3. trA=trB αν οι πίνακες Α, Β είναι όμοιοι.

Ανάστροφος πίνακας

Αν οι γραμμές ενός $n\times m$ πίνακα Α γίνουν στήλες με την ίδια σειρά (δηλαδή η πρώτη γραμμή να γίνει πρώτη στήλη κ.ο.κ) τότε παίρνουμε τον ανάστροφο πίνακα και γράφουμε A^T.

Δηλαδή: π.χ. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Ιδιότητες

1. $(A^T)^T=A$

2. $(A+B)^T=A^T+B^T$

3. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

• **Συμμετρικός** ονομάζεται ο $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας, που έχει ίσα τα συμμετρικά στοιχεία ως προς <u>την κύρια</u> διαγώνιο $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ και ισχύει : $\boxed{A=A^T}$

Αντίστροφος πίνακας

Έστω Α ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας. Αν υπάρχει $n\times n$ πίνακας που συμβολίζεται με A^{-1}, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$$

τότε ο Α λέγεται **αντιστρέψιμος ή ομαλός** και ο A^{-1} **αντίστροφος** του Α.

Ιδιότητες

1. $(A^{-1})^{-1}=A$

2. $(A^{-1})^{\kappa}=(A^{\kappa})^{-1}$

3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

• **Όμοιοι** ονομάζονται οι πίνακες Α και Β όταν υπάρχει πίνακας Ρ ομαλός έτσι ώστε:

$$A=PBP^{-1}$$

Ορθογώνιος πίνακας

Ορθογώνιος λέγεται ένας τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας $A=[\alpha_{ij}]=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\right)$, όταν το σύνολο των διανυσμάτων των στηλών του είναι ορθοκανονικό, δηλαδή :

$$\boxed{\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j=\begin{cases}0 & ,i\neq j\\ 1 & ,i=j\end{cases}}$$

Σχόλιο : το εσωτερικό γινόμενο των στηλών ανά δύο είναι μηδέν για $i\neq j$ (τα διανύσματα ανά δύο είναι κάθετα) και ένα για i=j (μοναδιαία).

- Ένας $n\times n$ πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν έχει αντίστροφο και ισχύει :

$$\boxed{A^{-1}=A^T}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Για έναν $n\times n$ τετραγωνικό πίνακα A, λέμε ορίζουσα του πίνακα A και γράφουμε detA= |A| τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει από μία συγκεκριμένη διαδικασία υπολογισμού.

- **Ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα :**

Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα A είναι :

$$\det A \underset{\text{συμβ}}{=} |A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{21}\cdot\alpha_{12}$$

- **Ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα :**

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα A υπολογίζεται με τη βοήθεια της ορίζουσας $2^{ης}$ τάξης ως εξής:

$$\det A \overset{\text{συμβ}}{=} |A|=\begin{vmatrix}\overset{+}{\alpha_{11}} & \overset{-}{\alpha_{12}} & \overset{+}{\alpha_{13}}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_{11}\cdot\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$$

Σχόλιο: Τα στοιχεία κατά την ανάπτυξη έχουν πρόσημο + ή – ανάλογα με το αν το άθροισμα του δείκτη (θέση) του στοιχείου είναι άρτιο ή περιττό, δηλαδή $(-1)^{i+j}$ για το στοιχείο α_{ij}.

Ιδιότητες Οριζουσών

$1^η$ Όταν αλλάζουμε τη θέση 2 γραμμών ή στηλών τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.

π.χ. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(-)\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2$

$2^η$ Όταν 2 γραμμές ή στήλες μιας ορίζουσας είναι ίσες ή ανάλογες τότε η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν. Επίσης όταν μια γραμμή ή στήλη έχει όλα τα στοιχεία μηδέν τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.

π.χ. $\begin{vmatrix}\boxed{1} & 4 & \boxed{2}\\ \boxed{2} & 5 & \boxed{4}\\ \boxed{3} & 1 & \boxed{6}\end{vmatrix}=0$

$3^η$ Η ορίζουσα άνω ή κάτω τριγωνικού ή διαγώνιου πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

π.χ. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot(-6)=-24$

$4^η$ Μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα από μια γραμμή ή στήλη μιας ορίζουσας,

π.χ. $\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

Ισχύει : $\boxed{\det(\lambda A)=\lambda^n \det A}$

$5^η$ **α)** Μπορούμε να προσθέσουμε όλες τις γραμμές ή όλες τις στήλες σε μία γραμμή ή στήλη (ή και λιγότερες).

β) Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ή στήλη με έναν πραγματικό αριθμό και να την προσθέσουμε σε κάποια άλλη.

π.χ. $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=$

(Προσθέσαμε και τις τρεις γραμμές στην πρώτη, δηλαδή : $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\to\gamma_1'$)

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=$$

(Αφαιρέσαμε στήλες :

$\sigma_2-\sigma_1\to\sigma_2'$ και $\sigma_3-\sigma_1\to\sigma_3'$)

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda-1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)(-1)$$

$6^η$ Για τους $n\times n$ πίνακες A, B, και τον ανάστροφο A^T ισχύουν:

$$\boxed{|A\cdot B|=|A|\cdot|B| \qquad |A^T|=|A|}$$

$7^η$ Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ή ομαλός όταν $|A|\neq0$, δηλαδή υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} και ισχύει:

$$\boxed{|A|\cdot|A^{-1}|=1 \qquad ή \qquad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}$$

$8^η$ Όταν στην ορίζουσα ενός $n\times n$ πίνακα A τα στοιχεία μιας στήλης (ή γραμμής) είναι άθροισμα κ-προσθετέων τότε η ορίζουσα |A| γράφεται σαν άθροισμα κ οριζουσών.

π.χ. $\begin{vmatrix}1 & x_1+y_1 & 4\\ 2 & x_2+y_2 & 1\\ 3 & x_3+y_3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & 4\\ 2 & x_2 & 1\\ 3 & x_3 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & y_1 & 4\\ 2 & y_2 & 1\\ 3 & y_3 & 3\end{vmatrix}$

Μεθοδολογία υπολογισμού ορίζουσας

Σε μια ορίζουσα για τον υπολογισμό της ή την απόδειξη κάποιας σχέσης εξετάζουμε τα παρακάτω και ανάλογα πράττουμε :

α) Αν από το άθροισμα όλων των γραμμών ή των στηλών βγαίνει κοινός παράγοντας. Τότε προσθέτουμε τις γραμμές ή τις στήλες.

β) Αν με τον συνδυασμό δυο γραμμών ή στηλών (αφαίρεση ανά δυο ή πολ/σμός με $\kappa\in R$ και πρόσθεση) προκύπτει κοινός παράγοντας.

γ) Ειδικά όταν σε μια γραμμή ή στήλη εμφανιστούν παντού πραγματικοί αριθμοί τότε συνδυάζουμε τις στήλες ή τις γραμμές έτσι ώστε να εμφανιστούν μηδενικά.

π.χ.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\overset{(\alpha)}{=}\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 1\\ 5-\lambda & 3-\lambda & 1\\ 5-\lambda & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\overset{(\gamma)}{=}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Συμβουλή : Φροντίζουμε με τις ιδιότητες των οριζουσών να εμφανίσουμε κοινούς παράγοντες ή όσα περισσότερα μηδενικά γίνεται.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ A^{-1}

- Έστω ο $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$.

Ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου α_{ij} ονομάζεται η ορίζουσα που προκύπτει αν «κόψουμε» την i-γραμμή και την j-στήλη και συμβολίζεται με $|M_{ij}|$, όπου M_{ij} ο αντίστοιχος $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας.

- **Αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij} ονομάζεται το γινόμενο $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ και συμβολίζεται με A_{ij} .

Δηλαδή : $\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|}$

π.χ. Για τον πίνακα $A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}$ είναι :

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10-1=9$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-1 \text{ κοκ}$$

- Όταν $|A|\neq0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας και δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}A}$$

όπου : **adjA** είναι ο **συμπληρωματικός** ή **προσηρτημένος** πίνακας που έχει στήλες τα αλγεβρικά συμπληρώματα των γραμμών του A. Δηλαδή :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{bmatrix}}$$

π.χ. Για τον $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ με $|A|=\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$

ο αντίστροφος είναι :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}}$$