ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Ονομάζουμε πίνακα A $n\times m$ μία διάταξη $n{\cdot}m$ αριθμών a_{ij} όπου $i = 1,2,\ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m$, σε n γραμμές και m στήλες. Δηλαδή:

$$A \underset{\sigma\mu\beta}{=} (\alpha_{ij}) \underset{o\rho\sigma}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Έτσι όπως γράφεται ο πίνακας A, ο αριθμός a_{ij}, που λέγεται **στοιχείο** του πίνακα, βρίσκεται στην i - γραμμή και στην j - στήλη.

Ένας πίνακας A $n\times 1$ με n γραμμές και μία στήλη ονομάζεται **πίνακας στήλη**, δηλαδή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ενώ ένας πίνακας A, $1\times n$ με μία γραμμή και n στήλες ονομάζεται **πίνακας γραμμή**, δηλαδή:

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση

Κάθε στοιχείο του χώρου R^n μπορεί να θεωρηθεί σαν πίνακας στήλη $n\times 1$ ή σαν πίνακας γραμμή $1\times n$.

Ορισμός

Ένα πίνακας A $n\times n$ όπου το πλήθος των γραμμών είναι ίσο με το πλήθος των στηλών λέγεται **τετραγωνικός**. Δηλαδή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ του προηγούμενου τετραγωνικού πίνακα A αποτελούν την **κύρια διαγώνιό** του.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A $n \times n$ θα λέγεται **άνω τριγωνικός** όταν τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν. Δηλαδή όταν έχουμε $\alpha_{ik} = 0$ για $i > k$.

Όμοια θα λέγεται **κάτω τριγωνικός** όταν τα στοιχεία πάνω απ' την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Δηλαδή έχουμε $\alpha_{ik} = 0$, για $i < k$.

Όταν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι πάνω και κάτω τριγωνικός θα λέγεται **διαγώνιος**.

Παράδειγμα

Για τους τετραγωνικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι ο A είναι πάνω τριγωνικός, ο B είναι διαγώνιος και ο Γ είναι κάτω τριγωνικός.

1.2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

α) Πρόσθεση πινάκων

Ας είναι οι $n \times m$ πίνακες $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$ με $i = 1,2,\ldots,n$ και $j = 1,2,\ldots,m$. Ορίζουμε σαν άθροισμα των πινάκων A, B τον $n \times m$ πίνακα A+B με στοιχεία τα $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Δηλαδή:

$$\boxed{A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m}$$

Ιδιότητες

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$$

$$A + 0 = A, \qquad A + (-A) = 0$$

Με 0 συμβολίζουμε τον πίνακα που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 0.

β) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού $\lambda \in R$ με τον πίνακα A, σαν τον πίνακα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό όλων των στοιχείων του A με το λ. Δηλαδή:

$$\boxed{\lambda A = \lambda(\alpha_{ij}) = (\lambda\alpha_{ij}), \qquad i = 1,2,\ldots,n, \; j = 1,2,\ldots,m}$$

π.χ. $\lambda\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 5\lambda \end{pmatrix}$

Ιδιότητες

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B, \quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

$$1\cdot A = A, \qquad (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$$

γ) Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ας είναι οι πίνακες:

$$A \;\; n\times m \;\text{ με }\; A=(\alpha_{ij}), \qquad 1\le i\le n,\; 1\le j\le m \;\text{ και}$$

$$B \;\; m\times k \;\text{ με }\; B=(\beta_{j\ell}), \qquad 1\le j\le m,\; 1\le \ell\le k$$

Ορίζουμε το γινόμενο AB των πινάκων A, B τον $n\times k$ πίνακα του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τα εσωτερικά γινόμενα των γραμμών του A με τις στήλες του B.

Δηλαδή το $\gamma_{i\ell}$ στοιχείο του AB προκύπτει αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A και της ℓ στήλης του B.

$$\gamma_{i\ell}=\left\langle(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{im}),(\beta_{1\ell},\beta_{2\ell},\ldots,\beta_{m\ell})\right\rangle=$$

$$=\alpha_{i1}\beta_{1\ell}+\alpha_{i2}\beta_{2\ell}+\ldots+\alpha_{im}\beta_{m\ell}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{j\ell}$$

Συνεπώς

$$\boxed{\begin{array}{l} AB=(\gamma_{i\ell}) \\ \text{με } 1\le i\le n,\; 1\le \ell\le k \;\text{ και }\; \gamma_{i\ell}=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{j\ell} \end{array}}$$

Για να γίνεται ο πολλαπλασιασμός πρέπει το πλήθος των στηλών του A να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B. Διότι προφανώς, για να έχουμε το $\gamma_{i\ell}$ στοιχείο του AB το διάνυσμα γραμμή του A και το διάνυσμα στήλη του B, είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο πλήθος συντεταγμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το γινόμενο του 3×3 πίνακα A με τον 3×2 πίνακα B, όπου:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-2\\3&4&1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\0&6\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-2\\3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2-1\cdot0 & 1\cdot4+0\cdot3-1\cdot6\\2\cdot1+1\cdot2-2\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot3-2\cdot6\\3\cdot1+4\cdot2+1\cdot0 & 3\cdot4+4\cdot3+1\cdot6\end{pmatrix}$$

Άρα $$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 11 & 30 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

Μπορεί το γινόμενο δύο πινάκων AB να ορίζεται και να μην ορίζεται το BA, π.χ. αν ο A είναι 3×2 και ο B είναι 2×2 ο AB ορίζεται και είναι 3×2 πίνακας ενώ ο BA δεν ορίζεται.

Ιδιότητες

1. $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$

2. $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$ ή $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$

3. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

Φυσικά θα πρέπει τα παραπάνω γινόμενα να ορίζονται.

Προσοχή: Αν ορίζονται τα AB και BA **δεν ισχύει** γενικά ότι $AB = BA$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

εξετάστε αν $AB = BA$.

Έχουμε:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 - 2\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 1 & 0\cdot 1 - 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 0 & 1\cdot 2 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $AB \neq BA$.

1.3. ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΣ – ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ο $n\times n$ πίνακας με $\alpha_{ij}=1$, για $i=j$ και $\alpha_{ij}=0$, για $i\neq j$ λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με I_n ή απλώς I

Παρατηρούμε εύκολα ότι για έναν $n\times m$ πίνακα A θα ισχύει:

$$\boxed{AI_m = A,\qquad I_n A = A}$$

Ορισμός

Ας είναι ο $n\times m$ πίνακας $A=(\alpha_{ij})$. Λέμε **ανάστροφο** του πίνακα A, τον $m\times n$ πίνακα $A^T=(\beta_{ij})$, όπου $\beta_{ij}=\alpha_{ji}$ με $i=1,2,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n$.

Δηλαδή ο A^T έχει στήλες τις γραμμές του A και γραμμές τις στήλες του A.

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς αν σ' ένα πίνακα A κάνουμε τις γραμμές στήλες παίρνουμε τον ανάστροφό του A^T.

Ιδιότητες του ανάστροφου πίνακα

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας που έχει ίσα τα συμμετρικά στοιχεία ως προς την κύρια διαγώνιο λέγεται **συμμετρικός**. Δηλαδή όταν $A^T = A$.

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, αφού $A^T = A$.

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A καλείται **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός** όταν υπάρχει $n \times n$ πίνακας, που συμβολίζεται με A^{-1}, τέτοιος ώστε:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

Ιδιότητες του αντίστροφου πίνακα :

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

1.4. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός

Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, με $\alpha_{ij} \in R$, λέγεται **ορθογώνιος**, όταν το σύνολο των διανυσμάτων των στηλών του $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ είναι ορθοκανονικό. Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο των στηλών ανά δύο είναι μηδέν για $i \neq j$ (τα διανύσματα ανά δύο είναι κάθετα) και ένα για $i = j$ (μοναδιαία).

$$\boxed{\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; i \neq j \\ 1, & \alpha\nu \;\; i = j \end{cases}}$$

Πρόταση

Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, με $\alpha_{ij} \in R$, είναι ορθογώνιος, όταν και μόνο όταν έχει αντίστροφο (είναι ομαλός) που ισούται με τον ανάστροφό του. Δηλαδή:

$$\boxed{A^{-1} = A^{T}}$$

Πρόταση

Αν ο $n \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, με $\alpha_{ij} \in R$, είναι ορθογώνιος τότε έχει ορίζουσα ίση με ± 1. Δηλαδή:

$$\boxed{\det A = \pm 1}$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή τα διανύσματα :

$\vec{x}_1 = (0,0,1)^T$, $\vec{x}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ και $\vec{x}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

είναι μοναδιαία, δηλαδή $|\vec{x}_1| = |\vec{x}_2| = |\vec{x}_3| = 1$

και κάθετα δηλαδή $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$, $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = 0$, $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 = 0$

ο πίνακας A είναι **ορθογώνιος.**

Παρατηρούμε ότι $A^{-1} = A^T$ διότι

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο πίνακας $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Επειδή τα διανύσματα:

$\vec{x}_1 = \frac{1}{5}(-3,0,4)^T$, $\vec{x}_2 = \frac{1}{5}(4,0,3)^T$ και $\vec{x}_3 = \frac{1}{5}(0,5,0)^T$

είναι μοναδιαία, δηλαδή $|\vec{x}_1| = |\vec{x}_2| = |\vec{x}_3| = 1$

και κάθετα $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$, $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = 0$, $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 = 0$

ο πίνακας A είναι **ορθογώνιος.**

Επίσης παρατηρούμε ότι $A^{-1} = A^T$ διότι

$$A \cdot A^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$