

**ΜΑΘ 001**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

*Τοπολόγιο & Μεθοδολογία*

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολυσμός
Αντιμεθετιική	$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a(\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta)\gamma$
Επιμεριστική	$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$	$a(\beta - \gamma) = a\beta - a\gamma$
Ουδέτερο στοιχ.	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Αντίθετο-αντίστροφο στοιχ	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$

**Κλάσματα – Ιδιότητες - Πράξεις**

Ορίζουμε  $\frac{a}{\beta} = a \cdot \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$ . Προσοχή το  $\frac{a}{0}$  δεν ορίζεται, διότι δεν

έχει φυσικό νόημα ο χωρισμός της μονάδας σε μηδέν μέρη.

•  $\frac{a}{a} = 1, \frac{0}{a} = 0, a = \frac{a}{1}, \frac{a\kappa}{a} = \kappa$

• Για κλάσματα ομόνυμα και ετερόνυμα ισχύει:

$\frac{a}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a \pm \beta}{\gamma}, \gamma \neq 0, \frac{a}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\delta \pm \gamma\beta}{\beta\delta} = \frac{a\delta \pm \gamma\beta}{\beta\delta}$

•  $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\gamma}{\beta\delta}, \frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$

**Ταυτότητες**

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + \beta + \gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a\beta + 2a\gamma + 2\beta\gamma$

**Παραγοντοποίηση (γινόμενο παραγόντων)**

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

**Δυνάμεις - ρίζες**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$
$(a\beta)^n = a^n \cdot \beta^n$	$\sqrt[n]{a\beta} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta}$
$\left(\frac{a}{\beta}\right)^n = \frac{a^n}{\beta^n}, \beta \neq 0$	$\sqrt[n]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$(a/\beta)^{-n} = (\beta/a)^n$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0, \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1, \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	

**Ιδιότητες διάταξης**

- Εάν  $a < b$ , τότε  $a + c < b + c$
- Εάν  $a < b$  και  $c > 0$  τότε  $ac < bc$  παραμένει φορά
- Εάν  $a < b$  και  $c < 0$  τότε  $ac > bc$  αλλάζει φορά

**ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ**  
**A.E.I. – A.T.E.I. – E.M.II. – E.A.II.**  
**www.arnos.gr**

**Κανόνες των προσήμων**

**Γινόμενον :**  $(+)(+) = (-)(-) = +, (-)(+) = (+)(-) = -$ ,

**Πηλίκον :**  $\left(\frac{+}{+}\right) = \left(\frac{-}{-}\right) = +, \left(\frac{-}{+}\right) = \left(\frac{+}{-}\right) = -$

**Απόλυτη τιμή – Ιδιότητες**

• **Ορισμός :**  $|x| = x$  αν  $x \geq 0, |x| = -x$  αν  $x < 0$

Η απόλυτη τιμή είναι η απόσταση του αριθμού από το μηδέν π.χ.

$|+7| = 7, |-5| = 5, |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$

•  $|x| \geq 0, |x|^2 = x^2, \sqrt{x^2} = |x|$

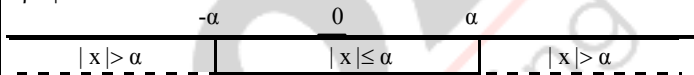
$|xy| = |x||y|, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

• **Εξίσωση :**  $|x| = a$  με  $a > 0 \Rightarrow x = \pm a$

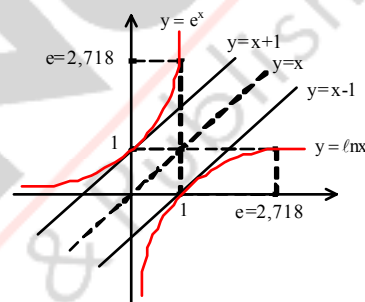
• **Ανίσωση :**  $|x| < a$  με  $a > 0 \Rightarrow -a < x < a$

$|x| > a$  με  $a > 0 \Rightarrow x > a$  ή  $x < -a$

Γραφικά :



**ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**



Η λογαριθμική και η εκθετική συνάρτηση είναι αντίστροφες :

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$  με  $x > 0$

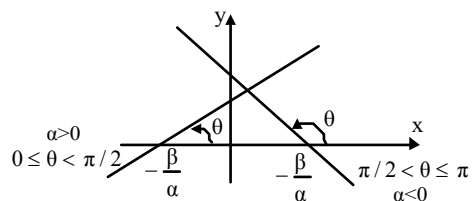
Βασική λογαριθμική ταυτότητα

$e^{\ln x} = x, x > 0$  Γενικά  $f(x) = e^{\ln f(x)}$

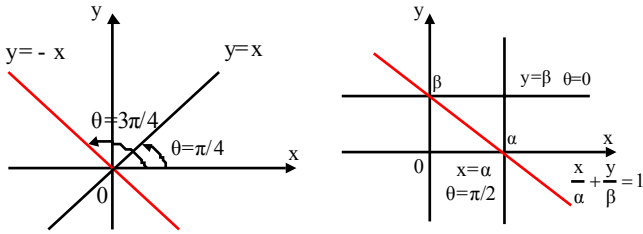
π.χ.  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

Ιδιότητες Εκθετικής	Ιδιότητες Λογαριθμικής
$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$	$\ln(a \cdot \beta) = \ln a + \ln \beta$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$\ln \frac{a}{\beta} = \ln a - \ln \beta$
$(e^a)^k = e^{ka}$	$\ln a^k = k \ln a$
$e^0 = 1, e^1 = e, (e)^2 = e^2$	$\ln 1 = 0, \ln e = 1, \ln e^2 = 2$

**Εξίσωση ευθείας  $y = ax + \beta, a \neq 0$**



Κλίση της ευθείας :  $\text{εφ}\theta = a$



Ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ με κλίση: } \epsilon\phi\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda$$

• Απόσταση  $d$  δύο σημείων  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### ΤΡΙΩΝΥΜΟ (ΠΑΡΑΒΟΛΗ)

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

• Ρίζες:  $f(x)=0$  Διακρίνουσα  $\Delta = b^2 - 4a\gamma$

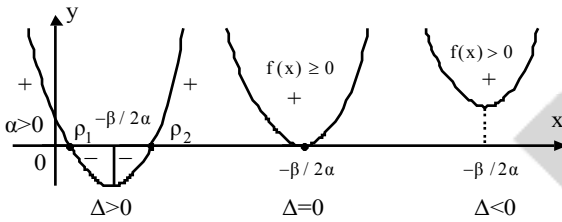
$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ για } \Delta \geq 0 \quad \rho_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ για } \Delta < 0$$

όπου  $i$  η φανταστική μονάδα με  $i^2 = -1$ .

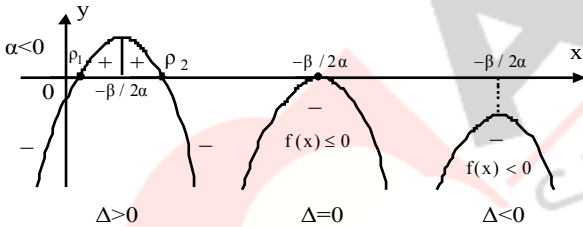
• Άθροισμα - γινόμενο:  $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{a}$

### Πρόσημο του τριωνύμου

α) Για  $a > 0$  η παραβολή «βλέπει» προς τα πάνω



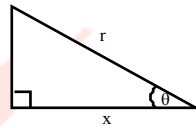
β) Για  $a < 0$  η παραβολή «βλέπει» προς τα κάτω:



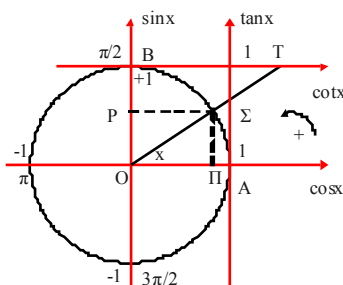
### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

#### Γωνία $\theta$ ορθογώνιου τριγώνου

- $\sin \theta = y/r$
- $\cos \theta = x/r$
- $\tan \theta = y/x$
- $\cot \theta = x/y$



**Τριγωνομετρικός κύκλος:** είναι ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του κύκλου, μονάδα μέτρησης την ακτίνα του και προσανατολισμό αντίθετο των δεικτών του ρολογιού.



Για τη γωνία  $x$  οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι:  $\cos x = \overline{OP} \in [-1, 1]$  με  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \overline{OP} \in [-1, 1] \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$\tan x = \overline{AS} \in (-\infty, +\infty) \text{ με } x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot x = \overline{BT} \in (-\infty, +\infty) \text{ με } x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

όπου  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OS}$ ,  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BT}$ , είναι οι αλγεβρικές τιμές στους αντίστοιχους άξονες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

### Τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$
- $\cot \theta = \cos \theta / \sin \theta$
- $\cot \theta = 1 / \tan \theta$

### Σχέσεις αντίθετων - συμπληρωματικών γωνιών

- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
- $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

### Τύποι διπλάσιου τόξου - Αποτετραγωνισμός

- $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$
- $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
- $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta) / 2$
- $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta) / 2$
- $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$
- $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tan x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\Delta.0.$	0	$\Delta.0.$	0
cot x	$\Delta.0.$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\Delta.0.$	0	$\Delta.0.$

### Σύστημα δύο αγνώστων (2x2)

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = a_1\beta_2 - a_2\beta_1, \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

- Αν  $D \neq 0$  έχει μοναδική λύση την  $x = D_x / D$ ,  $y = D_y / D$
- Αν  $D = 0$  και  $D_x \neq 0$  ή  $D_y \neq 0$  τότε είναι αδύνατο
- Αν  $D = D_x = D_y = 0$  είναι αόριστο. Εκτός  $a_1 = a_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$  και  $\gamma_1 \neq 0$  ή  $\gamma_2 \neq 0$  τότε είναι αδύνατο

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

$E$  = εμβαδόν,  $C$  = περιφέρεια,  $V$  = όγκος,  $S$  = ολική επιφάνεια,  $l$  = ακτίνα,  $h$  = ύψος,  $x$  = μήκος,  $y$  = πλάτος,  $b$  (ή  $a$ ) = μήκος βάσης (πλευρά)

1. τετράγωνο $E = a^2$	2. ορθογώνιο $E = xy$
3. παραλληλόγραμμο $E = bh$	4. τρίγωνο $E = (bh)/2$
5. κύκλος $E = \pi r^2$ , $C = 2\pi r$	6. τραπέζιο $E = (a+b)h/2$
7. κύβος $S = 6a^2$ , $V = a^3$	8. ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $S = 2(xy + yh + xh)$ ; $V = xyh$
9. ορθός κύλινδρος $S = 2\pi r(r+h)$ , $V = \pi r^2 h$	10. σφαίρα $S = 4\pi r^2$ , $V = (4\pi r^3)/3$
11. ορθός κώνος $S = \pi(r + \sqrt{h^2 + r^2})$ , $V = (\pi r^2 h)/3$	