ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1. 1. Έννοια Της Οριζουσας

Για έναν $\nu\times\nu$ τετραγωνικό πίνακα Α, λέμε **ορίζουσα** του πίνακα Α και γράφουμε **detA =| A|**, τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει από μία συγκεκριμένη διαδικασία υπολογισμού.
Αν ο Α είναι 2×2 πίνακας η ορίζουσά του υπολογίζεται ως εξής :

$$\det A \underset{\sigma\mu\beta}{=} |A| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$$

Αν ο Α είναι 3×3 πίνακας, ο υπολογισμός της ορίζουσας γίνεται με ανάπτυξη κατά γραμμή ή στήλη και έχουμε αναγωγή σε άθροισμα 2×2 οριζουσών π.χ. η ανάπτυξη ως προς τη πρώτη γραμμή ή την 2η στήλη γίνεται ως εξής :

$$\det A \underset{\sigma\mu\beta}{=} |A| = \left|\begin{array}{ccc} {\scriptstyle +} & {\scriptstyle -} & {\scriptstyle +} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right| = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

Σχόλιο : *Τα στοιχεία κατά την ανάπτυξη έχουν πρόσημο + ή – ανάλογα με το αν το άθροισμα του δείκτη (θέση) του στοιχείου είναι άρτιο ή περιττό δηλαδή* $(-1)^{\kappa+\lambda}$ *για το στοιχείο* $\alpha_{\kappa\lambda}$.
π.χ. το πρόσημο στο στοιχείο α_{11} *είναι* $(-1)^{1+1}=(+)$, *στο στοιχείο* α_{32} *είναι* $(-1)^{3+2}=(-)$, *στο στοιχείο* α_{33} *είναι* $(-1)^{33}=(+)$, *στο στοιχείο* α_{31} *είναι* $(-1)^{3+1}(+)$, *στο στοιχείο* α_{21} *είναι* $(-1)^{2+1}=(-1)$.

1.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Τονίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα Α είναι πραγματικός αριθμός δηλαδή $|A|\in R$.

1η) Όταν **αλλάζουμε τη θέση** 2 γραμμών ή 2 στηλών τότε η ορίζουσα **αλλάζει πρόσημο**.

π.χ. $|A| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = -(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$

2η) Μπορούμε να βγάλουμε **κοινό παράγοντα από μία γραμμή ή στήλη** μιας ορίζουσας.

$$\text{π.χ.}\quad |A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha(\beta_2 - \beta_1)$$

3η) Μπορούμε να **προσθέσουμε όλες τις γραμμές ή όλες τις στήλες** σε μια γραμμή ή στήλη (μπορούμε και λιγότερες). π.χ.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

Προσθέσαμε τις τρεις γραμμές στην πρώτη $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \to \gamma_1'$

4η) Μπορούμε να **πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ή στήλη** με έναν πραγματικό αριθμό και να την **προσθέσουμε σε κάποια άλλη**. π.χ.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{(-\gamma_2+\gamma_1\to\gamma_1')}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\sigma_2+\sigma_1\to\sigma_2'}{=}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 3 & 5 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 5 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-6)$$

5η) Η ορίζουσα **τριγωνικού πίνακα** πάνω ή κάτω είναι ίση με το **γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων**. π.χ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & \mu \end{vmatrix} = 7\lambda\mu$$

6η) Όταν 2 **γραμμές ή στήλες** μιας ορίζουσας είναι **ίσες ή ανάλογες** τότε η ορίζουσα είναι ίση με **μηδέν**. Επίσης όταν μια γραμμή ή στήλη έχει όλα τα στοιχεία μηδέν τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.

7η) Για τους $n \times n$ πίνακες A, B, A^T – ανάστροφο του A ισχύουν :

$$\boxed{|AB| = |A| \cdot |B| \;,\; |A^T| = |A|}$$

8η) Όταν $|A| \neq 0$ τότε λέμε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος ή ομαλός. Δηλαδή υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}, με $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
και ισχύει:

$$\boxed{|A^{-1}| \cdot |A| = 1 \;\text{ ή }\; |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

9η) Όταν στην ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα Α τα στοιχεία μιας στήλης (ή γραμμής) είναι άθροισμα κ – προσθετέων τότε η ορίζουσα $|A|$ γράφεται σαν άθροισμα κ – οριζουσών.

π.χ. $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 + x_1 & 4 \\ 3 & \alpha_2 + x_2 & 0 \\ 7 & \alpha_3 + x_3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 4 \\ 3 & \alpha_2 & 0 \\ 7 & \alpha_3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 4 \\ 3 & x_2 & 0 \\ 7 & x_3 & -3 \end{vmatrix}$$

1.3. ΕΛΑΣΣΟΝΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑ-ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ-ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ A^{-1}

Σ΄ έναν $n \times n$ πίνακα Α αν πάρουμε το στοιχείο α_{ij} και 'κόψουμε' την i – γραμμή και την j – στήλη τότε προκύπτει ένας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας M_{ij} του οποίου η ορίζουσα $|M_{ij}|$ λέγεται **ελάσσονα ορίζουσα** του στοιχείου α_{ij}.

Αν πάρουμε την τιμή της ελάσσονας ορίζουσας, με πρόσημο ανάλογα με τη θέση του στοιχείου α_{ij}, δηλαδή $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ τότε έχουμε το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** $\mathbf{A_{ij}}$ του στοιχείου α_{ij}.

π.χ. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ να βρεθεί η ελάσσονα ορίζουσα των στοιχείων α_{21}, α_{32} και τα αλγεβρικά συμπληρώματα A_{21}, A_{32}.

Για το στοιχείο α_{21} αφαιρούμε την 2η γραμμή και τη 1η στήλη οπότε προκύπτει ο πίνακας :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου α_{21} είναι:

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7$$

και το αλγεβρικό συμπλήρωμα $A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -7$.

Όμοια για το στοιχείο α_{32} έχουμε τον πίνακα:

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

την ελάσσονα ορίζουσα : $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

και το αλγεβρικό συμπλήρωμα: $A_{32} = -|M_{32}| = -4$

Μεθοδολογία Υπολογισμού Ορίζουσας

Σε μια ορίζουσα για τον υπολογισμό της ή την απόδειξη κάποιας σχέσης φροντίζουμε :
α) Να βγάλουμε κοινό παράγοντα σε γραμμή ή στήλη.
β) Να εμφανίσουμε όσο περισσότερα (μπόλικα) μηδενικά γίνεται προκειμένου να βρεθεί το ανάπτυγμα εύκολα σε μορφή γινομένου παραγόντων. Μ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε εύκολα τις τιμές που μηδενίζεται η ορίζουσα δηλ. $|A|=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ A^{-1}

Όταν $|A| \neq 0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A}$$

όπου ο πίνακας $\operatorname{adj}A$ έχει στήλες τα αλγεβρικά συμπληρώματα των γραμμών του πίνακα A και λέγεται **συμπληρωματικός ή προσαρτημένος** πίνακας. Δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

Παράδειγμα 1ο

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ αν $\alpha \cdot \delta \neq \beta \cdot \gamma$.

Η ορίζουσα είναι $|A| = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$.

Τα αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα A είναι:

$A_{11} = \delta \qquad A_{21} = -\beta$

$A_{12} = -\gamma \qquad A_{22} = \alpha$

Άρα από την παραπάνω σχέση ο A^{-1} είναι:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}}$$

Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Για να είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος πρέπει $|A| \neq 0$, που ισχύει διότι:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-12-16) - 5(-6+12) + 2(-4-6) = -56 - 30 - 20 = -106$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου θα βρούμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα Α (δηλαδή το συμπληρωματικό πίνακα)

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -28 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 22 \qquad A_{31} = +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -24$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -18 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 23 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Άρα ο αντίστροφος του Α είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{106}\begin{pmatrix} -28 & 22 & -24 \\ -6 & -18 & 10 \\ -10 & 23 & -1 \end{pmatrix}.$$