ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΦΑΙΡΑΣ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν σταθερή απόσταση R από το σημείο K(x_0, y_0, z_0) του R^3 ονομάζεται σφαίρα. Η σφαίρα με κέντρο το K(x_0, y_0, z_0) και ακτίνα R έχει εξίσωση:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

Η εξίσωση της σφαίρας είναι μια παράσταση δευτέρου βαθμού ως προς x, y, z ειδικού τύπου. Συγκεκριμένα οι συντελεστές των x^2, y^2, z^2 είναι όλοι ίσοι και επιπλέον δεν υπάρχουν οι όροι xy, yz, zx.
Γενικά μια εξίσωση της μορφής: $x^2+y^2+z^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z=0$

παριστάνει τη σφαίρα: $\left(x+\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\mathrm{B}}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{\Gamma}{2}\right)^2=\dfrac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}{4}$

με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\mathrm{A}}{2},-\dfrac{\mathrm{B}}{2},-\dfrac{\Gamma}{2}\right)$ και ακτίνα $R=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}{2}$.

Παραδείγματα

A. Η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=2x$ έχει κέντρο K(1,0,0) και ακτίνα R = 1 αφού $x^2+y^2+z^2=2x \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=1$

B. Η εξίσωση $x^2+y^2+z^2-4y+2x=0 \Rightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2=4+1$
$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=5$ παριστάνει σφαίρα με K(-1,2,0) και $R=\sqrt{5}$.

G. Η εξίσωση $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$
$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2+4z+4=4+4+1$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$ παριστάνει σφαίρα με K(1,-2,-2) και R = 3.

ΤΟΜΗ ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση της σφαίρας:

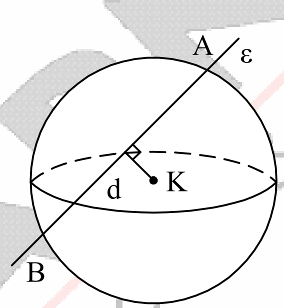
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

καθώς και την παραμετρική εξίσωση της ευθείας ε: $\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+\beta t \\ z=z_1+\gamma t \end{cases}$,

όπου $P(x_1, y_1, z_1)$ σημείο της ευθείας και $\vec{n}=(a,\beta,\gamma)$ το διάνυσμα διεύθυνσής της μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής τους που καθορίζονται από την επίλυση του συστήματος αυτών δηλαδή:

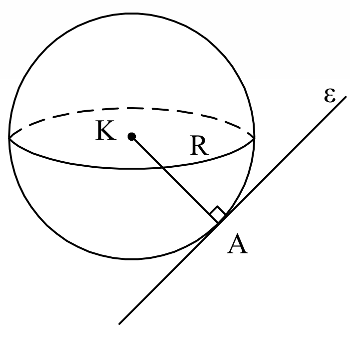
$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \\ x=x_1+at \\ y=y_1+\beta t \\ z=z_1+\gamma t \end{cases}$$

Α. Αν οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι δυο πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους τότε η ευθεία τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους.

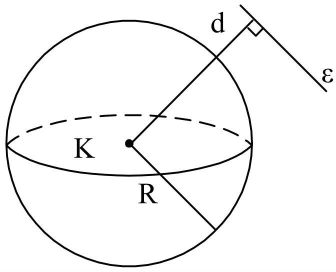


Σ΄ αυτή την περίπτωση $d(\mathrm{K},\varepsilon)<R$, δηλαδή η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι μικρότερη της ακτίνας.

Β. Αν το παραπάνω σύστημα έχει μια λύση τότε η ευθεία εφάπτεται της σφαίρας. Δηλαδή $d(\mathrm{K},\varepsilon)=R$.



Γ. Αν το παραπάνω σύστημα δεν έχει λύσεις πραγματικές τότε η ευθεία βρίσκεται εκτός σφαίρας και ισχύει $d(\mathrm{K},\varepsilon) > R$.



Παραδείγματα

Α. Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας ε: $\begin{cases} x = t \\ y = t-1 \\ z = t+1 \end{cases}$ με τη σφαίρα $S: x^2 + y^2 + z^2 = 5.$

Λύση

Λύνουμε το σύστημα των: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x = t \\ y = t-1 \\ z = t+1 \end{cases} \Rightarrow t^2 + t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1 = 5$

$\Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

Για $t = 1$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$. Άρα Α(1,0,2).

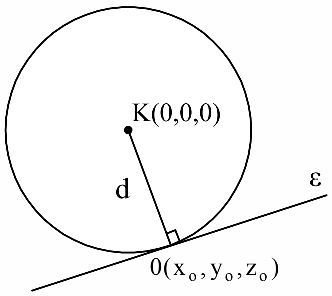
Για $t = -1$: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$. Άρα Β(-1,-2,0).

Β. Να δειχθεί ότι η ευθεία ε: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases}$ εφάπτεται της σφαίρας

$S: x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$.

Λύση

Για να εφάπτεται η ευθεία στη σφαίρα πρέπει $d(\mathrm{K}, \varepsilon) = \frac{\sqrt{24}}{3}$. Έστω O($x_0$, y_0, z_0) το σημείο επαφής της σφαίρας με την ευθεία. Αφού το Ο ανήκει στην ευθεία, άρα:



$$\begin{cases} x_0 = t+1 \\ y_0 = t+1 \\ z_0 = -t+1 \end{cases}$$

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{KO}} \perp \varepsilon$. Άρα $\vec{n}_\varepsilon \perp \overrightarrow{\mathrm{KO}} \Rightarrow \vec{n}_\varepsilon \cdot \overrightarrow{\mathrm{KO}} = 0$

Είναι $\vec{n}_\varepsilon = (1,1,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{KO}} = (x_0, y_0, z_0) = (t+1, t+1, -t+1)$

Επομένως $\vec{n}_\varepsilon \cdot \overrightarrow{\mathrm{KO}} = 0 \Rightarrow t+1+t+1+t-1=0 \Rightarrow 3t=-1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Οπότε $\mathrm{O}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Πράγματι $\mathrm{d} = \left|\overrightarrow{\mathrm{KO}}\right| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \mathrm{R}$

ΤΟΜΗ ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

Γνωρίζοντας την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα R:

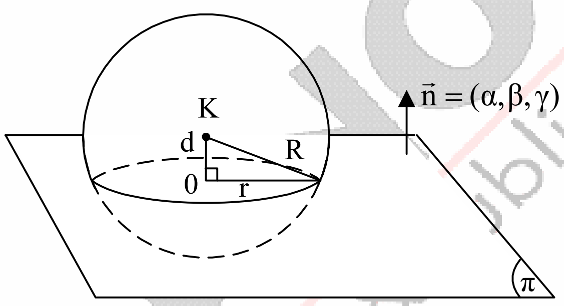
$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

καθώς και την εξίσωση του επιπέδου Π: $ax+\beta y+\gamma z+\delta=0$

(όπου $\vec{n}=(a,\beta,\gamma)$ το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο) μπορούμε να βρούμε την τομή τους που καθορίζεται από την λύση του συστήματος αυτών, δηλαδή:

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\\ ax+\beta y+\gamma z+\delta=0\end{cases}$$

Α. Αν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ της σφαίρας είναι μικρότερη της ακτίνας R, δηλαδή $d(S,\varepsilon)<R$ τότε το επίπεδο τέμνει την σφαίρα.
Η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι κύκλος. Η ακτίνα r και το κέντρο Ο του κύκλου υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη τα εξής:



Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

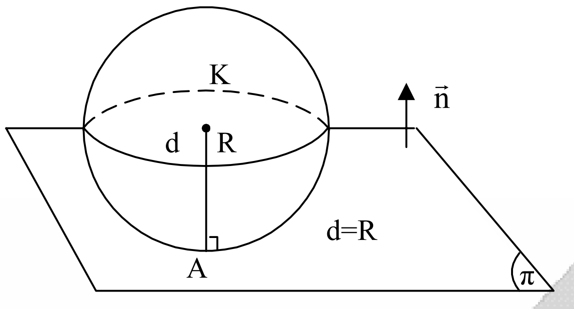
$$d^2+r^2=R^2 \;\Rightarrow\; r^2=R^2-d^2$$

όπου d η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο Π.

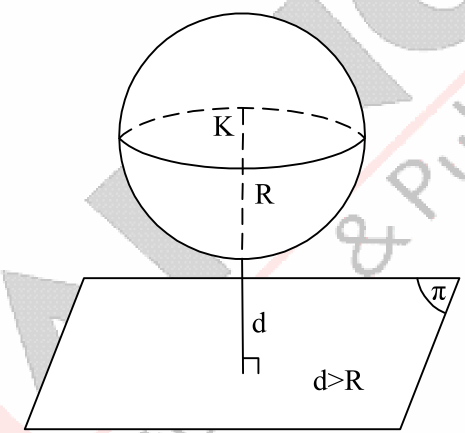
Δηλαδή: $d(K,\Pi)=\dfrac{|ax_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2}}$

Το κέντρο $O(x_1, y_1, z_1)$ του κύκλου υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overrightarrow{KO}=\lambda\vec{n}$ και ότι $O\in\Pi$.

Β. Αν η απόσταση του επιπέδου Π από το κέντρο Κ(x_0, y_0, z_0) της σφαίρας ισούται με την ακτίνα R τότε το επίπεδο εφάπτεται της σφαίρας.
Το σημείο επαφής του επιπέδου με την σφαίρα είναι το σημείο Α.
Ισχύει $d(\text{Κ},\Pi)=R$ και $\text{Α}\in\Pi$.



Γ. Αν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας είναι μεγαλύτερη της ακτίνας R, δηλαδή $d(\text{Κ},\Pi)>R$ τότε το επίπεδο είναι εξωτερικό της σφαίρας.



Παραδείγματα

Α. Δίνεται η σφαίρα $S: x^2+(y-5)^2+z^2=25$. Να δειχθεί ότι εφάπτεται στο επίπεδο Π: $x+2y+2z-25=0$.

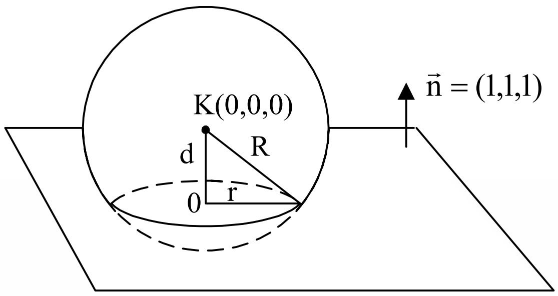
Λύση

Από την εξίσωση της σφαίρας $x^2+(y-5)^2+z^2=25$ προκύπτει ότι έχει κέντρο Κ(0,5,0) και ακτίνα R = 5.
Για να εφάπτεται η σφαίρα στο επίπεδο Π: $x+2y+2z-25=0$ πρέπει $d(\text{Κ},\Pi)=R=5$.

Πράγματι $d(\text{Κ},\Pi)=\dfrac{|0+2\cdot 5+2\cdot 0-25|}{\sqrt{1+4+4}}=5=R.$

Β. Να βρεθεί η τομή της σφαίρας $S: x^2+y^2+z^2=9$ με το επίπεδο
Π: $x+y+z-3=0$.

Λύση



Η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $O(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα r.

Ισχύει $d(\mathrm{K},\Pi)=\dfrac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$r^2+d^2=R^2 \Rightarrow r^2=R^2-d^2=9-3=6 \Rightarrow r=\sqrt{6}$

Ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{KO}}=(x_0-0, y_0-0, z_0-0)=(x_0, y_0, z_0)$

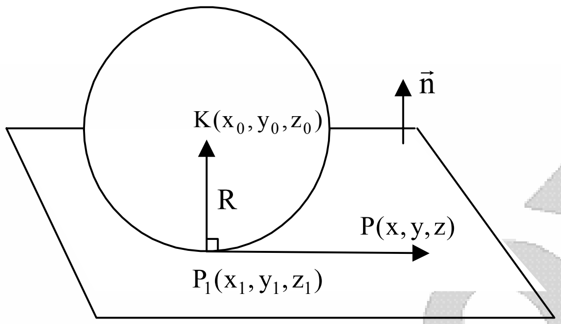
Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{KO}}=\lambda\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\lambda \\ y_0=\lambda \\ z_0=\lambda \end{cases}$ και $\mathrm{O}\in\Pi$ δηλαδή:

$x_0+y_0+z_0-3=0 \Rightarrow 3\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=1$. Άρα O(1,1,1)

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΑ

α΄ τρόπος

Έστω σφαίρα $S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ με κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα R. Έστω $P_1(x_1, y_1, z_1)$ το σημείο επαφής της σφαίρας με το εφαπτόμενο επίπεδο σ΄ αυτήν.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{P_1K}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)=\vec{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π.

Επίσης το διάνυσμα $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ ανήκει στο επίπεδο. Η εξίσωση του επιπέδου Π είναι:

$$\boxed{\Pi:\ (x-x_1)(x_0-x_1)+(y-y_1)(y_0-y_1)+(z-z_1)(z_1-z_0)=0}$$

β΄ τρόπος

Αν $F(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2$ τότε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια της σφαίρας στο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ είναι το:

$\nabla F|_{P_1}=\left(2(x_1-x_0), 2(y_1-y_0), 2(z_1-z_0)\right)$

Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι:

$$\boxed{\Pi:\ (x-x_1)(x_0-x_1)+(y-y_1)(y_0-y_1)+(z-z_1)(z_0-z_1)=0}$$

(Βλέπε σελ. 51 **Λογισμος Συναρτησεων Πολλων Μεταβλητων, Ι. Π. Κροκου**)

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα $S: x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$ στο σημείο P(0,3,5).

Από την εξίσωση της σφαίρας $S: x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$ προκύπτει ότι έχει κέντρο K(0,3,0) και ακτίνα R = 5.

Το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση:

Π: $(x - x_1)(x_0 - x_1) + (y - y_1)(y_0 - y_1) + (z - z_1)(z_0 - z_1) = 0$
$\Rightarrow (x-0)(0-0) + (y-3)(3-3) + (z-5)(0-5) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5z + 25 = 0 \Rightarrow z = 5$