ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α) θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 134
Β) α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Σ

Γ) α) $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

β) $(c\cdot f)'(x)=c\cdot f'(x)$**,** όπου c σταθερά

γ) $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{\alpha}^{\beta}=\ln\beta-\ln\alpha=\ln\frac{\beta}{\alpha}$**,** με $\beta>\alpha>0$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Α) Είναι $\nu_1=4,\ \nu_3=8,\ \nu_4=7$ και $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$, με $\nu=25$, άρα $\nu_2=25-19=6$

Από τους τύπους $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}100,\ i=1,2,3,4$, $N_1=\nu_1,\ N_2=N_1+\nu_2$

$N_3=N_2+\nu_3$, $N_4=\nu$, $F_1\%=f_1\%$, $F_2\%=F_1\%+f_2\%$, $F_3\%=F_2\%+f_3\%$

$F_4\%=100$, έχουμε:

$f_1\%=\frac{4}{25}100=16$, $f_2\%=\frac{6}{25}100=24$, $f_3\%=\frac{8}{25}100=32$,

$f_4\%=\frac{7}{25}100=28$

$N_1=4$, $N_2=10,\ N_3=18,\ N_4=25$, $F_1\%=16,\ F_2\%=40,\ F_3\%=72,$

$F_4\%=100$. Ακόμη: $x_1\nu_1=4,\ x_2\nu_2=12,\ x_3\nu_3=24$, $x_4\nu_4=28$

Έτσι ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο επόμενος:

Βιβλία x_i	Μαθητές ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i\nu_i$
1	4	16	4	16	4
2	6	24	10	40	12
3	8	32	18	72	24
4	7	28	25	100	28
Αθροίσματα	25	100	–	–	68

Β) Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό (25), άρα η διάμεσος δ είναι η 13^{η} παρατήρηση, δηλαδή έχουμε $\delta = 3$

Γ) Από τον τύπο που δίνει τη μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v}$, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{68}{25} = 2,72 \text{ βιβλία}$$

Δ) Το ζητούμενο ποσοστό είναι $F_4\% - f_1\% = 100 - 16 = 84$, ή 84%

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Α) Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = \left(-x^2 + 6x + 8\right)' = -2x + 6,\ x \in \mathbb{R}$$

Β) Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 6 > 0 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < 3,$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 6 < 0 \Leftrightarrow -2x < -6 \Leftrightarrow x > 3$

Άρα η f (ως συνεχής συνάρτηση) είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,\ +\infty)$

Γ) Από **Β)** ερώτημα έχουμε ότι στο $x_0 = 3$ η f παρουσιάζει μέγιστο, αφού:

για $x < 3$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $f(x) < f(3)$,

για $x > 3$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(x) < f(3)$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq f(3)$, συνεπώς η f στο $x_0 = 3$ παρουσιάζει μέγιστο.

Δ) Είναι: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 6x + 8\right)dx = -\int_0^3 x^2 + 6\int_0^3 xdx + 8\int_0^3 dx =$

$$-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 8[x]_0^3 = -\frac{27}{3} + 6\frac{9}{2} + 8 \cdot 3 = -9 + 27 + 24 = 42$$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Α) Για $x \neq -1$ είναι:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim_{x \to -1}(x+2) = 1$$

Άρα, $\alpha = 1$

Β) Για $\alpha = 1$ έχουμε, $f(x) = x^3 + 4x + 2e^x,\ x \in \mathbb{R}$

α) Η f είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων,

($f_1(x)=x^3+4x$: παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και

$f_2(x)=2e^x$: παραγωγίσιμη ως γινόμενο σταθερού αριθμού

επί εκθετική συνάρτηση), με:

$$f'(x)=\left(x^3+4x+2e^x\right)'=\left(x^3\right)'+(4x)'+\left(2e^x\right)'=3x^2+4+2e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Για $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+4+2e^x$

Ισχύει $3x^2\geq 0$, άρα $3x^2+4>0$ και $2e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε, $3x^2+4+2e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς η f

(ως συνεχής συνάρτηση) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[2,\ 4]$ και ισχύει $f(x)>0$

για κάθε $x\in[2,\ 4]$, αφού: $x^3+4x>0$, $2e^x>0$ στο $[2,\ 4]$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_2^4\left(x^3+4x+2e^x\right)dx=\int_2^4 x^3dx+4\int_2^4 xdx+2\int_2^4 e^xdx=$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4+2\left[e^x\right]_2^4=\left(4^3-4\right)+4(8-2)+2\left(e^4-e^2\right)=$$

$$60+24+2e^4-2e^2=84+2e^4-2e^2 \text{ τ.μ.}$$