ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

α. Η μέση τιμή των βαθμών είναι:
$\bar{x} = \dfrac{8+14+20+12+16}{5} = \dfrac{70}{5} = 14$.

β. Το μέγεθος του δείγματος των βαθμών είναι ν=5 (περιττό). Άρα, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τους βαθμούς έχουμε:
8, 12, 14, 16, 20,
συνεπώς η διάμεσος δ των βαθμών είναι: $\delta = x_3 = 14$.

γ. Υπολογίζουμε τη διακύμανση s^2 των βαθμών:

$$s^2 = \frac{(8-14)^2 + (12-14)^2 + (14-14)^2 + (16-14)^2 + (20-14)^2}{5} =$$

$$= \frac{36+4+0+4+36}{5} = \frac{80}{5} = 16.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση s των βαθμών είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

δ. Για το εύρος R των βαθμών έχουμε: $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 8 = 12$.

ε. Υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβλητότητας των βαθμών ($x_i > 0,\ i = 1,2,3,4,5$). Είναι: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{4}{14} \cdot 100 = \dfrac{200}{7}$,
άρα $CV \cong 28,6\% > 10\%$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α .Για $x < 1$ είναι $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)}$,άρα:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\lambda(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2\lambda}.$$

β. Για $x > 1$ είναι $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, άρα:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}.$$

γ. Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \text{ με } f(1)=\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς: $\frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με:

$$f'(x)=\left(e^{\lambda x}\right)'=e^{\lambda x}(\lambda x)'=\lambda e^{\lambda x}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\left(f'(x)\right)'=f''(x)=\left(\lambda e^{\lambda x}\right)'=\lambda e^{\lambda x}(\lambda x)'=\lambda^2 e^{\lambda x}.$$

β. Έχουμε : $f''(x)-f'(x)-2f(x)=0\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}\lambda^2e^{\lambda x}-\lambda e^{\lambda x}-2e^{\lambda x}=0\Leftrightarrow$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=0\underset{\text{για } x\in\mathbb{R}}{\overset{e^{\lambda x}>0}{\Leftrightarrow}}\lambda^2-\lambda-2=0.$$

Είναι: $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$.

Άρα $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$, δηλαδή $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$

γ. i) Όταν λ=2, η f(x) γίνεται: $f(x)=e^{2x}$, άρα $f'(x)=\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Όταν λ=-1, η f(x) γίνεται: $f(x)=e^{-x}$, άρα $f'(x)=\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2008\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(2x^2\right)'+(3x)'+(2008)',\text{άρα}$$

$$f'(x)=x^2-4x+3,\ x\in\mathbb{R}.$$

β. Θέτουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

Είναι Δ=4>0, οπότε $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}$,

δηλαδή οι ρίζες είναι: $x_1=3$, $x_2=1$.

Ο πίνακας μεταβολών και προσήμου της $f'(x)$ είναι:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

ΤΟΠ. ΜΕΓ. ΤΟΠ. ΕΛΑΧ.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ 1]$, $[3,\ +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 3], άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1 το $f(1)=\frac{1}{3}-2+3+2008=\frac{6028}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο x=3 το $f(3)=\frac{1}{3}27-18+9+2008=2008$.

γ. Η f στο διάστημα $[1,\ +\infty)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(3)=2008, αφού:

- Για $1\leq x<3$ ισχύει f(x)>f(3)=2008 (επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα)
- Για x>3 ισχύει f(x)>f(3)=2008 (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα)

Άρα για κάθε $x\in[1,\ +\infty)$ ισχύει $f(x)\geq f(3)=2008$.