ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
fast & easy

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Τυπολόγιο & Μεθοδολογία

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα του οποίου τ' αποτελέσματα δεν είναι εκ των προτέρων καθορισμένα (ντετερμινιστικά), αλλά τυχαία (στοχαστικά).
- **Δυνατά αποτελέσματα** ή **δυνατές περιπτώσεις** είναι όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης.
- **Δειγματικός χώρος (δ.χ.)** λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και συμβολίζεται με **Ω ή S**. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τότε ο **δ.χ.** είναι:

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa \}$$

- **Απλό γεγονός** ή **ενδεχόμενο** λέγεται κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος τύχης, ενώ η συλλογή απλών γεγονότων λέγεται **σύνθετο γεγονός** ή **ενδεχόμενο**.
- Ο **δ.χ. Ω** ενός πειράματος τύχης είναι ενδεχόμενο που συμβαίνει πάντοτε, αφού όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμά του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι΄ αυτό το Ω ονομάζεται και **βέβαιο ενδεχόμενο**.
- **Αδύνατο ενδεχόμενο** ονομάζουμε το κενό σύνολο ∅, που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος.
- Λέμε ότι ένα ενδεχόμενο **συμβαίνει** ή **πραγματοποιείται** αν το αποτέλεσμα του πειράματος περιέχεται στο ενδεχόμενο. **Ευνοϊκές περιπτώσεις** λέγονται τα στοιχεία ενός ενδεχομένου που πραγματοποιείται.

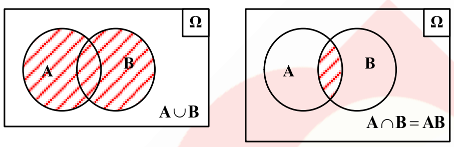
ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ένωση ενδεχομένων

Αν έχουμε το ενδεχόμενο «συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα Α και Β» τότε γράφουμε **Α∪Β** και διαβάζεται «**Α ένωση Β**» ή «**Α ή Β**».

Το σύμβολο ∪ αντιστοιχεί στη διάζευξη «**ή**».

Δηλαδή όταν πραγματοποιείται η Α∪Β τότε πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.



Τομή ενδεχομένων

Αν έχουμε το ενδεχόμενο «συμβαίνει το Α και το Β» τότε γράφουμε **Α∩Β** ή **ΑΒ** και διαβάζεται «**Α τομή Β**» ή «**Α και Β**» .

Το σύμβολο ∩ αντιστοιχεί στην σύζευξη «**και**».

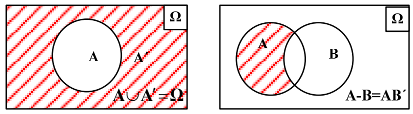
Δηλαδή όταν πραγματοποιείται η Α∩Β, τότε πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.

π.χ. 1ο Ρίχνουμε ένα κέρμα.
Ο **δ.χ.** είναι: Ω={Κ(κορώνα), Γ(γράμματα)}. Τα δυνατά ενδεχόμενα είναι :
A_1={Κ}, A_2={Γ}, A_3={Κ,Γ}, A_4={∅}.
Προφανώς : A_3=Ω βέβαιο ενδεχόμενο A_4={∅} το αδύνατο ενδεχόμενο

Συμπλήρωμα ή άρνηση ενδεχομένου

Αν έχουμε το ενδεχόμενο «**δε συμβαίνει το Α**» τότε γράφουμε **Α΄** ή **Ω – Α** ή $\overline{\mathbf{A}}$ ή $\mathbf{A^c}$ και διαβάζεται «**όχι Α**» ή «**συμπλήρωμα του Α**».

Δηλαδή όταν πραγματοποιείται το Α΄, τότε δεν πραγματοποιείται το Α.



Διαφορά ενδεχομένων

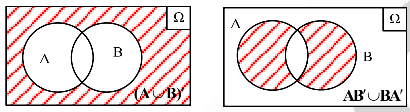
Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β του **δ.χ.** Ω έχουμε το ενδεχόμενο «συμβαίνει μόνο το Α» τότε γράφουμε **Α – Β = Α∩Β΄** και διαβάζεται «**διαφορά του Β από το Α**», το οποίο συμβαίνει, όταν συμβαίνει το Α αλλά όχι το Β.

Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β του **δ.χ.** Ω

- Τα Α,Β μπορούν να γραφτούν ως εξής :

$$A = (AB') \cup (AB), \quad \mu\varepsilon \quad (AB') \cap (AB) = \emptyset$$
$$B = (AB) \cup (A'B), \quad \mu\varepsilon \quad (AB) \cap (A'B) = \emptyset$$

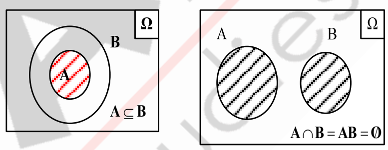
- Αν έχουμε το ενδεχόμενο «**δε συμβαίνει κανένα από τα Α και Β**» τότε γράφουμε (Α∪Β)΄ .



- Αν έχουμε το ενδεχόμενο «**συμβαίνει μόνο ένα από τα Α και Β**» τότε γράφουμε (Α – Β) ∪(Β – Α)=(ΑΒ΄)∪(ΒΑ΄)
- Αν η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται τη πραγματοποίηση του Β τότε γράφουμε Α⊆Β.

Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β δεν μπορούν να συμβούν και τα δύο στο ίδιο πείραμα, δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία (όταν Α∩Β = ∅), τότε λέγονται **ασυμβίβαστα ή ξένα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα**.



Ιδιότητες συνολοθεωρητικών πράξεων

Αντιμεταθετική

- Α∪Β = Β∪Α
- Α∩Β = Β ∩Α

Προσεταιριστική

- Α∪(Β∪Γ) = (Α∪Β) ∪Γ = Α∪Β∪Γ
- Α∩ (Β∩Γ) = (Α∩Β) ∩Γ = Α∩Β∩Γ

Επιμεριστική

- Α∩(Β∪Γ) = (Α∩Β) ∪ (Α∩Γ)
- Α∪ (Β∩Γ) = (Α∪Β) ∩ (Α∪Γ)

Τύποι De Morgan

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α) (Α∪Β)΄ = Α΄∩ Β΄

Το συμπληρωματικό της ένωσης δύο ενδεχομένων ισούται με την τομή των συμπληρωμάτων τους,

β) (Α∩Β)΄ = Α΄ ∪ Β΄

Το συμπληρωματικό της τομής δύο ενδεχομένων ισούται με την ένωση των συμπληρωμάτων τους.

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Αν Ν(Ω) είναι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων μπορούν να εμφανιστούν στο πείραμα τύχης και Ν(Α) το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων ώστε να πραγματοποιηθεί το Α, τότε ορίζουμε την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Α και συμβολίζουμε με Ρ(Α) από τη σχέση :

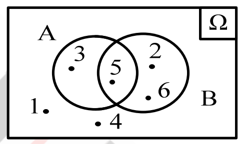
$$P(A) = \frac{N(A) \quad \text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{N(\Omega) \quad \text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ισχύουν :

$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$, **Ρ(Ω)=1**, **Ω** ο **δ.χ.**, και **Ρ(∅)=0**

π.χ. 1ο Ρίχνουμε το ζάρι μια φορά.
Ο **δ.χ.** είναι : Ω={1,2,3,4,5,6}. Έστω τα ενδεχόμενα: Α={3,5}, Β={2,5,6}
Τότε αυτά έχουν πιθανότητες :

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Από τις συνολοθεωρητικές πράξεις έχουμε :
$A \cap B = \{5\}$, $A \cup B = \{2,3,5,6\}$ με πιθανότητες :

$$P(AB) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Παρατηρούμε ότι Ρ(Α∪Β)=Ρ(Α)+Ρ(Β)-Ρ(ΑΒ)

π.χ. 2ο Ρίχνουμε το ζάρι 2 φορές. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων : Α={φέρνουμε εξάρες}, Β={φέρνουμε 5 και 6} και Γ={να φέρνουμε άθροισμα 7}.
Ο **δ.χ.** έχει 6× 6=36 στοιχεία (ζεύγη) και είναι : Ω={(1,1),(1,2),…,(1,6),(2,1),…,(6,1), ,…,(6,5),(6,6)}και τα ενδεχόμενα : Α={(6,6)}, Β={(5,6),(6,5)}, Γ={(1,6),(2,5),…,(6,1)}
Συνεπώς : Ρ(Α)=1/36, Ρ(Β)=2/36=1/18, Ρ(Γ)=6/36=1/6

Σχόλιο : Το ποσοστό επί τοις εκατό (%) αναφέρεται σε 100 στοιχεία. Η πιθανότητα Ρ ενός ενδεχομένου αναφέρεται στη μονάδα (ένα στοιχείο). π.χ. Το ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων μιας μηχανής είναι 15% δηλαδή, στα 100 τυχαία προϊόντα αναμένουμε να εμφανιστούν 15 ελαττωματικά. Η πιθανότητα το τυχαίο προϊόν να είναι ελαττωματικό, είναι p=0,15.

Ρ(πιθανότητα)*100 → ποσοστό Α%
Α(ποσοστό %) /100 → πιθανότητα Ρ

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ (Kolmogorov 1930)

Η πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα αξιώματα:

i) Ρ(Ω)=1 όπου **Ω δ.χ.**

ii) $0 \le P(A)$, για κάθε $A \subseteq \Omega$.
Δηλαδή η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι πάντα μη αρνητική

iii) Ρ(Α∪Β) = Ρ(Α) + Ρ(Β), με Α∩Β=∅
Δηλαδή για να βρούμε την πιθανότητα τα ένωσης, για ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους, αθροίζουμε πιθανότητες.

Όμοια Ρ(Α∪Β∪Γ)=Ρ(Α)+Ρ(Β)+Ρ(Γ), Α,Β,Γ ανά δυο ξένα μεταξύ τους.

- **Από τα αξιώματα προκύπτουν :**

1. Για το αδύνατο ενδεχόμενο (∅) ισχύει:

$$P(\emptyset)=0$$

2. Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι πάντα μικρότερη ή ίση του 1.

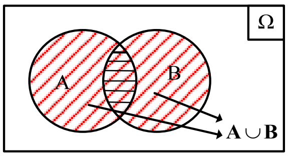
$$P(A)\le 1$$

3. Αναγωγή στο συμπληρωματικό ενδεχόμενο:

$$P(A)=1-P(A') \quad \text{αφού} \quad A\cup A'=\Omega$$

4. Ένωση ενδεχομένων:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



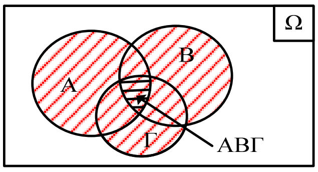
Αφαιρούμε την τομή διότι τα στοιχεία της λαμβάνονται δύο φορές.

5. Σχέσης διάταξης για υποσύνολα.:

$$\text{Αν} \quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

6. Ένωση τριών ενδεχομένων Α,Β,Γ.

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma)$$



7. Τα ενδεχόμενα Α,Β αν $AB\neq\emptyset$ γράφονται :

$$P(A)=P(AB)+P(AB')$$

αφού $A=AB\cup AB'$ και AB, AB΄ ξένα.:

$$P(B)=P(AB)+P(A'B)$$

αφού $B=AB\cup A'B$ και AB, A΄B ξένα.

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Ρίχνουμε ένα ζάρι και παίρνουμε τα ενδεχόμενα :
Α={2,4,6 «φέρνω» ζυγό αριθμό} και Β={4,5}.
Η τομή τους είναι : ΑΒ={4}
Από τον ορισμό της πιθανότητας έχουμε :

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(AB)=\frac{1}{6}$$

Αν ξέρουμε ότι ήρθε άρτιος, ποια είναι η πιθανότητα να ήρθε 4 ή 5. Εφόσον πραγματοποιήθηκε το Α οι δυνατές περιπτώσεις είναι 3. Άρα τα ευνοϊκά ενδεχόμενα για την πραγματοποίηση του Β είναι 1: να έρθει 4.
Γράφουμε P(B/A) και διαβάζουμε η πιθανότητα να συμβεί το **Β εφόσον γνωρίζουμε ότι συνέβη** το Α : P(B/A)=1/3.
Όμοια για P(A/B) διαβάζουμε η πιθανότητα να συμβεί το Α εφόσον γνωρίζουμε ότι συνέβη το Β. P(A/B)=1/2. Παρατηρούμε ότι :

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}=P(B/A) \quad \text{και}$$

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}=P(A/B)$$

- Λέμε **δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα** και γράφουμε P(B/A), την πιθανότητα να συμβεί το Β **εφόσον συνέβη** ή **γνωρίζουμε** ότι πραγματοποιήθηκε ή με την **προϋπόθεση** ότι έχει συμβεί το Α (με $P(A)\neq 0$) η οποία είναι :

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Όμοια ορίζεται η P(A/B) αν $P(B)\neq 0$ με :

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα P(B/A) μπορεί να είναι μικρότερη, ίση ή και μεγαλύτερη της P(B).

Πολλαπλασιαστικός νόμος

Από την δεσμευμένη πιθανότητα P(B/A) και την P(A/B) αν λύσουμε ως προς P(AB) προκύπτει:

$$\mathbf{P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B)}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι «εργαλείο» για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα, το θεώρημα ολικής πιθανότητας και τον τύπο Bayes.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Σε **δύο διαδοχικά πειράματα** τύχης με ενδεχόμενα Α και Β αν P(B) = P(B|A) τότε και P(A) = P(A|B), δηλαδή η πληροφορία για το Α δεν αλλάζει την P(B) και η πληροφορία για το Β δεν αλλάζει την P(A) και τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται (στοχαστικά) **ανεξάρτητα.** Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(B/A)=P(B), \qquad P(A/B)=P(A)$$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
Α: «στην $1^η$ ρίψη 6άρι», Β: «στην $2^η$ ρίψη 6άρι».

$$P(A)=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{1}{6} \quad \text{και} \quad P(AB)=\frac{1}{36}$$

Άρα : P(AB) = P(A)P(B) =1/36
δηλαδή τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

- Τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανεξάρτητα αν ισχύουν:
  P(AB) = P(A)P(B) , P(AΓ) =P(A)P(Γ)
  P(BΓ) = P(B)P(Γ)
  P(ABΓ) = P(A)P(B)P(Γ)
- Τα n ενδεχόμενα A_1, A_2, ... , A_n είναι **ανεξάρτητα κατά ζεύγη** αν ισχύει:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j), \quad \text{με} \quad i\neq j$$

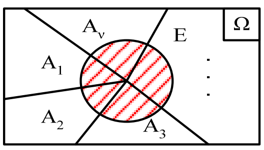
Σχόλιο: *Τα n ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς απαραίτητα να είναι ανεξάρτητα.*

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Ας είναι ο **δ.χ. Ω**. Τα ενδεχόμενα $A_1,A_2,\dots,A_\nu$ είναι μια διαμέριση του **δ.χ. Ω** όταν η ένωση τους μας δίνει τον δ.χ. ($A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_\nu=\Omega$) και ανά δυο είναι ξένα ($A_i\cap A_j=\emptyset$ για $i\neq j$).
Έστω το ενδεχόμενο Ε που αν συμβεί, πραγματοποιείται ένα από τα A_i. (βλέπε σχ.)
Τότε ισχύει :
$P(E)=P(EA_1)+P(EA_2)+\dots+P(EA_\nu)$ δηλαδή :

$$P(E)=P(A_1)P(E/A_1)+\dots+P(A_\nu)P(E/A_\nu)$$

Μεθοδολογία : *Στις ασκήσεις όταν μας ζητείται η πιθανότητα ενδεχομένου Ε που κινείται πάνω σ' όλες τις δυνατές περιπτώσεις του **δ.χ. Ω**, τότε χρησιμοποιούμε το Θ. Ολικής Πιθανότητας.*



Τύπος του Bayes

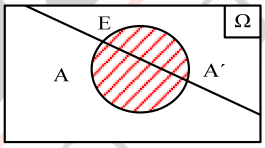
Αν ζητείται το ενδεχόμενο πραγματοποίησης ενός εκ των A_i δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Ε (δεσμευμένη πιθανότητα) τότε έχουμε :

$$P(A_i/E)=\frac{P(A_iE)}{P(E)}=\frac{P(A_i)P(E/A_i)}{P(E)} \quad i=1,\dots,\nu$$

Συμβουλή :
Ο τύπος του Bayes προϋποθέτει την εύρεση της P(E) από το Θ. Ολικής Πιθανότητας.

Μεθοδολογία ασκήσεων

α) Ορισμός ενδεχομένων ξεκινάμε από το ζητούμενο για να καθορίσουμε τον **δ.χ.** και τα ενδεχόμενα που αφορούν την άσκηση.
β) Διαμέριση : ξεκαθαρίζουμε στον **δ.χ. Ω**, τα ενδεχόμενα που «τεμαχίζεται» και το ενδεχόμενο που «κινείται» σ' όλα αυτά..
Προσοχή : *όταν ο **δ.χ.** διαμερίζεται σε δύο ενδεχόμενα Α,Β, τα Α,Β, είναι συμπληρωματικά (Β=Α΄) και για το ενδεχόμενο Ε που κινείται στα Α,Β ισχύει :*



Δηλαδή :

$$P(E)=P(EA)+P(EA')=P(A)P(E/A)+P(A')P(E/A')$$

Παράδειγμα: Το κουτί Ι περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες, ενώ το κουτί ΙΙ περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και αν έρθει «Κ» βγάζουμε μια σφαίρα από το κουτί Ι, ενώ αν έρθει «Γ» βγάζουμε μια σφαίρα από το κουτί ΙΙ.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να βγει κόκκινη σφαίρα;
β) Αν ξέρουμε ότι βγήκε κόκκινη σφαίρα. ποια είναι η πιθανότητα να πήραμε τη σφαίρα από το κουτί Ι, δηλαδή να ήρθε κεφάλι;

α) Κόκκινη σφαίρα μπορεί να εξαχθεί από το κουτί Ι ή από το ΙΙ. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Ολικής Πιθανότητας.
Κ: το ενδεχόμενο να εξαχθεί κόκκινη σφαίρα
Μ: το » να εξαχθεί μπλε σφαίρα
Ι: το » » να βγει σφαίρα από το κουτί Ι.
ΙΙ: το » » να βγει σφαίρα από το κουτί ΙΙ.
P(K)=P(KI)+P(KII)=P(I)P(K/I)+P(II)P(K/II)
Για τις πιθανότητες αυτές έχουμε:
P(I) = P(II) = 0.5, ίση δηλαδή με τη πιθανότητα να έρθει «Κ» ή «Γ». Επίσης: P(K/I) = 3/5, P(K/II)=2/10. Επομένως : P(K) = 4/10 = 0.4.
β) Ψάχνουμε την πιθανότητα
P(I/K) =

$$\frac{P(KI)}{P(K)}=\frac{P(K/I)\cdot P(I)}{P(K)}=\frac{(3/5)\cdot 0.5}{0.4}=0.75$$

Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή τον τύπο του Bayes