**ΜΑΘΗΜΑ 2ο**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2

## ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

◈ **Σκοπός:**

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του ορίου και της συνέχειας μιας συνάρτησης.

◈ **Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα θα πρέπει να μπορείτε:

※ Να εφαρμόζετε τις ιδιότητες των ορίων και να βρίσκετε τα όρια που σας ζητούνται.

※ Να μετασχηματίζετε παραστάσεις που οδηγούν σε όρια της μορφής:
$$\frac{0}{0}$$

※ Να βρίσκετε το όριο μιας πολυκλαδικής συνάρτησης στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

※ Να διατυπώνετε τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο και σε διάστημα.

※ Να εξετάζετε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο ή σ' ένα διάστημα.

※ Να βρίσκετε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση που ορίζεται με τη βοήθεια αυτών να είναι συνεχής σ' ένα σημείο ή ένα διάστημα.

✦ **Ορισμός του ορίου**

Να περιγράψετε τι σημαίνει η έκφραση:
$$\lim_{x\to x_o} f(x) = k$$

<u>Απάντηση:</u> Η παραπάνω έκφραση, διαβάζεται:

« **το όριο της συνάρτησης** $f$ **είναι το** $k$ **όταν το** $x$ **τείνει στο** $x_o$»

Ενώ σημαίνει ότι καθώς το $x$ **παίρνει τιμές ολοένα και πιο κοντά στο** $x_o$ **οι τιμές τις** $f(x)$ **πλησιάζουν όλο και περισσότερο στην τιμή** $k$**.**

**Παρατηρήσεις:**

**1.** Η έκφραση $\lim_{x\to x_o} f(x)=k$ έχει **νόημα** όταν η συνάρτηση ορίζεται σε **περιοχή του** $x_o$ (δηλαδή σε διάστημα $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή $(\alpha,x_0)$ ή $(x_0,\beta)$ ), **χωρίς να είναι απαραίτητο το** $x_o$ **να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.**

**2.** **Ιδιότητες ορίων**

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell_1$ και $\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_2$ με $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α. $\lim_{x\to x_o}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_o} f(x)+\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_1+\ell_2$

β. $\lim_{x\to x_o}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_o} f(x)-\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_1-\ell_2$

γ. $\lim_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_o} f(x)\cdot\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_1\cdot\ell_2$

δ. Αν $\ell_2\neq 0$, τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_o} f(x)}{\lim_{x\to x_o} g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$

ε. $\lim_{x\to x_o} f^{\nu}(x)=\left[\lim_{x\to x_o} f(x)\right]^{\nu}=\ell_1^{\nu}$ αν $\nu\in\mathbb{N}$

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και όταν ο αριθμός $\nu$ είναι αρνητικός ακέραιος και $\ell_1\neq 0$.

στ. Αν $f(x)\geq 0$ σε περιοχή του $x_o$, τότε:

$$\lim_{x\to x_o}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_o} f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$$

**3.** Αν η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τρόπο για $x<x_o$ και για $x>x_o$, δηλαδή είναι της μορφής:

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{για} \quad x<x_o \\ h(x) & \text{αν} \quad x>x_o \end{cases}$$

τότε:

α. Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ για $x<x_o$

( συμβολίζεται με $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$ )

Έστω ότι:

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_1$$

β. Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ για $x>x_o$

( συμβολίζεται με $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$ )

Έστω ότι:

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\lim_{x\to x_o} h(x)=\ell_2$$

γ. Αν $\ell_1=\ell_2=\ell$ τότε λέμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell$$

**<u>Παραδείγματα</u>**

1. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases}$ τότε:

★ Για $x<1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1^2=1$$

★ Για $x>1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} x^3=1^3=1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

Επομένως:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=1}$$

2. Αν $f(x)=\begin{cases} 3x, & x<4 \\ x^2, & x\ge 4 \end{cases}$ τότε:

★ Για $x<4$, είναι:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4} 3x=3\cdot 4=12$$

★ Για $x\ge 4$, είναι:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4} x^2=4^2=16$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$.

## ✦ Συνέχεια

Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, λέγεται συνεχής στο $x_o \in A$;

Απάντηση: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, λέγεται συνεχής στο $x_o \in A$ αν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

**Παρατηρήσεις:**

**1.** Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in A$, τότε λέγεται συνεχής στο Α.

**2.** Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα τότε η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής γραμμή.

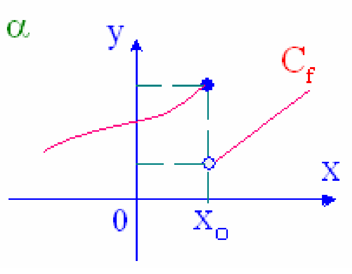
**3.** Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις και οι πράξεις οι πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς.

**Παραδείγματα:** Για $x_o \in \mathbb{R}$, έχουμε:

α. $\lim_{x\to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$ β. $\lim_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_o$

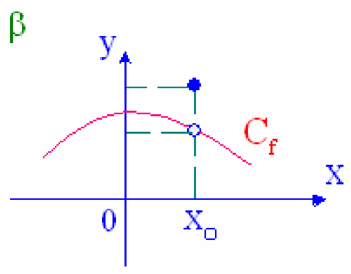
γ. $\lim_{x\to x_o} e^x = e^{x_o}$ δ. $\lim_{x\to x_o} \ell nx = \ell nx_o$, αν $x_o > 0$

**4.** Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής στο $x_o \in A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:




Το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι:

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_o^-} f(x)$$




Το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει, όμως είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) \neq f(x_o)$$

**5.** Η συνέχεια μιας συνάρτησης εξετάζεται **μόνο σε σημεία** $x_o$ **που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.**