ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3.

3^o ΜΑΘΗΜΑ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ
ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

◈ **Σκοπός**

Σκοπός της ενότητας είναι ο ορισμός της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής καθώς και οι μέθοδοι εύρεσης παραγώγων.

◈ **Προσδοκώμενα αποτελέσματα**

Όταν έχετε ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα θα πρέπει να μπορείτε:

⁂ Να δίνετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.

⁂ Να βρίσκετε με τη βοήθεια του ορισμού την παράγωγο μερικών βασικών συναρτήσεων.

⁂ Να αποδεικνύετε τους βασικούς κανόνες παραγώγισης.

⁂ Να βρίσκετε την παράγωγο δοσμένης συνάρτησης χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων.

⁂ Να βρίσκετε το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y για κάποια δεδομένη τιμή του μεγέθους x όταν δίνεται η σχέση:

$$y = f(x)$$

που συνδέει τα δυο μεγέθη.

ΟΡΙΣΜΟΙ

✦ Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη στο** x_o **του πεδίου ορισμού** της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι **πραγματικός αριθμός.** Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_o)$ και το ονομάζουμε **παράγωγο της** f **στο** x_o.

Παρατηρήσεις:

1. Το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

αν υπάρχει, είναι ίσο με το όριο:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Αν τα παραπάνω όρια είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε και τα δυο είναι ίσα με $f'(x_o)$.

2. Το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

μπορεί να υπάρχει **αλλά να μην είναι πραγματικός αριθμός.** Σ' αυτή την περίπτωση η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο** x_o.

3. Αν μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε κάποιο x_o, του πεδίου ορισμού της, τότε σίγουρα **δεν είναι παραγωγίσιμη στο** x_o.

4. Μια συνάρτηση **μπορεί να είναι συνεχής** σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της αλλά **όχι παραγωγίσιμη στο** x_o

<u>Παράδειγμα:</u> Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=|x|, \qquad x\in\mathbb{R}$$

Τότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$$

Άρα η f είναι **συνεχής στο 0.**

Θεωρούμε το λόγο:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

✳ Για $h>0$, είναι:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Άρα:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1}$$

✳ Για $h<0$, είναι:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

Άρα:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1}$$

Επομένως δεν υπάρχει το:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Άρα η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

5. Αν μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της είναι **σίγουρα συνεχής στο** x_o.

✦ Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_o;

<u>Απάντηση:</u>

Αν δυο μεγέθη x, y συνδέονται με τον τύπο $y=f(x)$, όπου f μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, τότε η παράγωγος $f'(x_o)$ εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής του** y **ως προς** x **για τη συγκεκριμένη τιμή** $x=x_o$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν $S(t_o)$ είναι το διάστημα που έχει διανύσει ένα κινητό σε χρόνο t_o και $S(t_o+\Delta t)$ το διάστημα που έχει διανύσει σε χρόνο $t_o+\Delta t$ τότε ο λόγος:

$$\bar{\upsilon}=\frac{S(t_o+\Delta t)-S(t_o)}{\Delta t}$$

λέγεται μέση ταχύτητα του κινητού στο διάστημα $[t_0, t_o+\Delta t]$.

Όταν το Δt είναι πάρα πολύ μικρό $(\Delta t \to 0)$ τότε το όριο:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_o+\Delta t)-S(t_o)}{\Delta t}$$

λέγεται στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $\upsilon(t_o)$. Δηλαδή είναι:

$$\upsilon(t_o)=S'(t_o)$$

Η ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_o λέγεται **ρυθμός μεταβολής του διαστήματος** την ίδια χρονική στιγμή.

2. Ανάλογα ορίζεται η μέση επιτάχυνση:

$$\bar{\alpha}=\frac{\upsilon(t_o+\Delta t)-\upsilon(t)}{\Delta t}$$

όπου $\upsilon(t_o)$ και $\upsilon(t_o+\Delta t)$ η ταχύτητα του κινητού τις χρονικές στιγμές t_o και $t_o+\Delta t$ αντίστοιχα.

Όπως και η στιγμιαία επιτάχυνση:

$$\alpha(t_o)=\upsilon'(t_o)$$

Δηλαδή η στιγμιαία επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_o είναι ο **ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** την ίδια χρονική στιγμή.

3. Μερικά (ακόμη) παραδείγματα

※ Αν $q(t)$ είναι η συνάρτηση που δίνει το φορτίο που περνά από μια διατομή ενός αγωγού συναρτήσει του χρόνου η **ένταση του ρεύματος** $I(t_o)$ τη χρονική στιγμή t_o είναι ο **ρυθμός μεταβολής του φορτίου** εκείνη τη χρονική στιγμή. Άρα:

$$I(t_o)=q'(t_o)$$

※ Ο **ρυθμός μεταβολής του έργου** $W(t)$ μιας δύναμης μας δίνει την **ισχύ** $P(t)$ της δύναμης. Δηλαδή:

$$P(t_o)=W'(t_o)$$

※ Στην οικονομία, το κόστος k και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγομένου προϊόντος. Τα πηλίκα:

$$\frac{k(x_o+h)-k(x_o)}{h},\quad \frac{P(x_o+h)-P(x_o)}{h}$$

εκφράζουν το μέσο κόστος και το μέσο κέρδος αντίστοιχα, ενώ αν οι συναρτήσεις $k(x)$ και $P(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο x_o τα $k'(x_o)$ και $P'(x_o)$ εκφράζουν το οριακό κόστος και οριακό κέρδος ....

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

◈ Δίνεται συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$
Τι λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f;

Απάντηση:

Αν B είναι το υποσύνολο του A $(B\subseteq A)$ για το οποίο ισχύει ότι, για κάθε $x\in B$ η f είναι παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Παρατηρήσεις:

1. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν $S(t)$ είναι η συνάρτηση του διαστήματος που διανύει ένα κινητό σε σχέση με το χρόνο, τότε σε κάθε χρονική στιγμή t, η ταχύτητα $\upsilon(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon(t)=S'(t)$$

2. Αν η συνάρτηση $f':B\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Γ, τότε ορίζεται η:

$$(f')':\Gamma\to\mathbb{R}$$

που συμβολίζεται με f'' και λέγεται δεύτερη παράγωγος της f.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν $\alpha(t)$ είναι η επιτάχυνση ενός κινητού, τότε:

$$\alpha(t)=\upsilon'(t)=S''(t)$$

Ανάλογα ορίζονται η τρίτη f''', παράγωγος της f (ως παράγωγος της f''), η τέταρτη παράγωγος κ.ο.κ.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

◈ Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης:

$$f(x)=c, \quad x\in\mathbb{R}$$

είναι $f'(x)=0$.

Απάντηση: Είναι

$$f(x+h)=c \quad \text{για κάθε} \quad x,h\in\mathbb{R}$$

Άρα για $h\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

Επομένως ισχύει:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0, \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

Παρατήρηση

Αποδεικνύεται ότι για τη συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα $(\Delta\subseteq\mathbb{R})$, αν είναι:

$$f'(x)=0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\Delta$$

τότε η f είναι σταθερή στο Δ. Δηλαδή:

$$\boxed{f(x)=c, \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\Delta}$$

◈ Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης:

$$f(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}$$

έχει $f'(x)=1$

Απόδειξη:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$, είναι:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1}$$

◊ Να αποδείξετε ότι αν $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι:

$$f'(x)=2x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

Απόδειξη:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Επομένως:

$$\boxed{f'(x)=2x, \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

Παρατηρήσεις:

1. Αποδεικνύεται ότι:

α. Αν $f(x)=x^\nu$, $x\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$, τότε:

$$f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$$

Παράδειγμα:

$$(x^5)'=5\cdot x^4$$

β. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa<0$ και $x\neq 0$, ισχύει:

$$(x^\kappa)'=\kappa\cdot x^{\kappa-1}$$

Παράδειγμα:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2\cdot x^{-2-1}=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3} \quad \text{για κάθε} \quad x\neq 0$$

γ. Αν $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ και $x>0$, τότε:

$$(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Παράδειγμα:

$$(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x>0$$

2. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$

β. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. $(e^x)' = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ. $(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

◊ Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta$$

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x) = c \cdot f(x)$$

τότε:

$$F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)$$

Άρα για κάθε $x \in \Delta$ και $h \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} =$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \Delta$. Άρα:

$$\boxed{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta}$$

◊ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta$$

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

Τότε για κάθε $x \in A$ και $h \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{[F(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Επομένως:

$$\boxed{F'(x)=\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x) \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\Delta}$$

Παρατηρήσεις:

1. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ, τότε:

$$\boxed{\left(\kappa\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)\right)'=\kappa\cdot f'(x)+\lambda\cdot g'(x)}$$

για κάθε $x\in\Delta$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

2. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ, τότε αποδεικνύεται ότι:

α. $\boxed{\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$ για κάθε $x\in\Delta$

β. $$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

για κάθε $x\in\Delta$ με $g(x)\neq 0$

Άμεση συνέπεια του β, είναι:

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{(1)'\cdot g(x)-1\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}$$

για κάθε $x\in\Delta$ με $g(x)\neq 0$, αφού $(1)'=0$