ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=3x^2+5x-2$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f(0), \quad f(-2) \quad \text{και} \quad f(1)$$

Λύση:

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A=\mathbb{R}$$

Αν ο τύπος της συνάρτησης δεν περιέχει παρονομαστές, ρίζες ή λογαρίθμους το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$

β. $f(0)=3\cdot 0^2+5\cdot 0-2=-2$

$$f(-2)=3\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-2=$$
$$=3\cdot 4+5\cdot(-2)-2=12-10-2=0$$

Αν $f(\rho)=0$ τότε ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα της f

$$f(1)=3\cdot 1^2+5\cdot 1-2=3+5-2=6$$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ β. $g(x)=\sqrt{x-2}$

γ. $h(x)=\ell n(x+1)$

Λύση:

α. Πρέπει να είναι:

$$x-3\neq 0$$

Όταν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει παρονομαστές αυτοί πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός

Άρα:

$$x\neq 3$$

με συνέπεια το πεδίο ορισμού της f να είναι:

$$\boxed{A=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)}$$

β. Πρέπει να είναι:

$$x-2\geq 0$$

Οι υπόρριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές

Άρα:

$$x\geq 2$$

επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι:

$$\boxed{A=[2,+\infty)}$$

γ. Πρέπει να είναι:

$$x+1>0$$

Άρα:

$$x>-1$$

με συνέπεια το πεδίο ορισμού της h να είναι:

$$\boxed{A=(-1,+\infty)}$$

Για κάθε παράσταση της μορφής $\ell n(A(x))$ θα πρέπει $A(x)>0$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{x-10}+\dfrac{1}{x-2}$ β. $f(x)=\dfrac{3x+1}{|x|-x}$

<u>Λύση:</u>

α. Πρέπει να είναι:

$$x-10\geq 0 \quad \text{και} \quad x-2\neq 0$$

Ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν

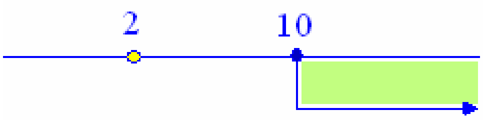
Το υπόρριζο είναι μη αρνητικό

Άρα:

$$x\geq 10 \quad \text{και} \quad x\neq 2$$

επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$\boxed{A=[10,+\infty)}$$



β. Θα πρέπει να είναι:

$$|x|-x\neq 0$$

Άρα:

$$|x|\neq x$$

Όμως ισχύει:

$$|x|=x \quad \text{όταν} \quad x\geq 0$$

Άρα θα πρέπει να είναι:

$$x<0$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι:

$$\boxed{A=(-\infty,0)}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

$|x|=x$ αν $x\geq 0$

και

$|x|=-x$ αν $x<0$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -3 & x\leq 0 \\ 3\eta\mu x & 0<x\leq \pi \\ x^2+1 & x>\pi \end{cases}$$

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

β. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τιμές:

$$f(-10),\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right),\quad f\left(\sqrt{30}\right)$$

Λύση:

α. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$\boxed{A=\mathbb{R}}$$

αφού η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δεδομένου ότι έχει νόημα όταν:

$$x\le 0 \quad ή \quad 0<x\le\pi \quad ή \quad x>\pi$$

β. Είναι $-10<0$, επομένως:

$$\boxed{f(-10)=-3}$$

Επειδή $0\le\frac{\pi}{3}<\pi$, έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3ημ\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Είναι $\sqrt{30}\simeq 5,48>\pi$, άρα:

$$\boxed{f\left(\sqrt{30}\right)=\sqrt{30}^2+1=31}$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2+3x+1,\quad x\in\mathbb{R} \quad και \quad g(x)=x+1,\quad x\in\mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. $S=f+g$ β. $D=f-g$

γ. $P=f\cdot g$ δ. $R=\frac{f}{g}$

Λύση:

α. Γνωρίζουμε ότι:

$$S(x)=f(x)+g(x)=x^2+3x+1+x+1$$

Άρα:

$$\boxed{S(x)=x^2+4x+2,\quad για\ κάθε\quad x\in\mathbb{R}}$$

β. Είναι:

$$D(x)=f(x)-g(x)=x^2+3x+1-x-1$$

Άρα:

$$\boxed{D(x)=x^2+2x,\quad για\ κάθε\quad x\in\mathbb{R}}$$

γ. Είναι:

$$P(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(x^2+3x+1\right)(x+1)$$

Άρα:

$$\boxed{P(x)=x^3+4x^2+4x+1, \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

δ. Είναι:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0$$

Άρα:

$$\boxed{R(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}, \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}-\{-1\}}$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ell nx, \quad x>0 \quad \text{και} \quad g(x)=2x+1, \quad x\in\mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. $(f\circ g)(x)$ β. $(g\circ f)(x)$

<u>Λύση:</u>

α. Για να ορισθεί καλά η:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

θα πρέπει $x\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$: το πεδίο ορισμού της g) και

$$g(x)\in(0,+\infty)$$

Πρώτα βρίσκουμε για ποια x ορίζεται η $f\circ g$ και μετά τον τύπο της.

Άρα:

$$x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad 2x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{1}{2}$$

Επομένως για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ έχουμε:

$$\boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=\ell n(2x+1)}$$

β. Πρέπει:

$$x\in(0,+\infty) \quad \text{και} \quad f(x)\in\mathbb{R}$$

Όμως αν:

$$x\in(0,+\infty) \quad \text{τότε} \quad \ell nx\in\mathbb{R}$$

Άρα πρέπει τελικά:

$$x\in(0,+\infty)$$

που είναι και το πεδίο ορισμού της $(g\circ f)(x)$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\ell nx)$$

Παρατηρούμε ότι γενικά είναι:

$$f\circ g\neq g\circ f$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν έχουμε ούτε το ίδιο πεδίο ορισμού.

Άρα:

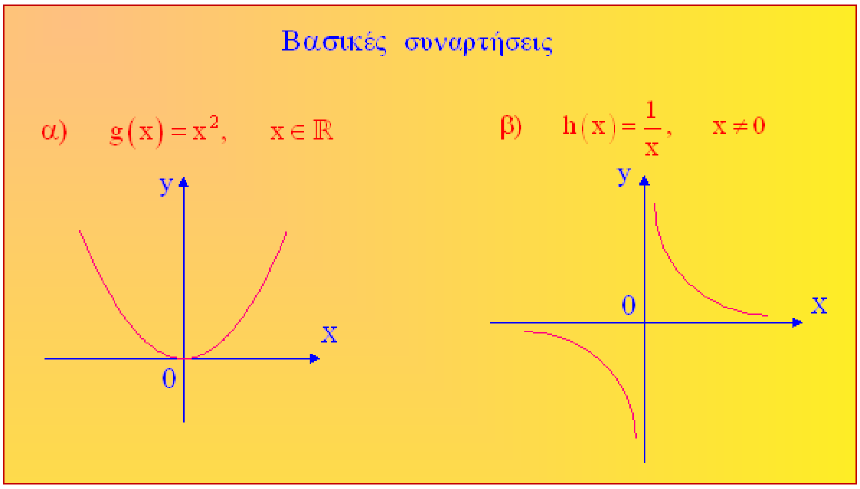
$$\boxed{(g\circ f)(x)=2\cdot\ell nx+1}$$

7. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

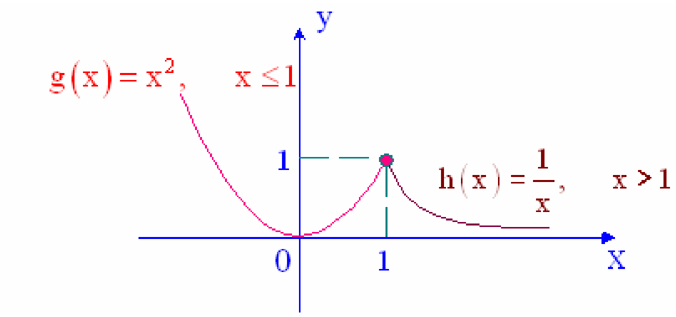
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την παραπάνω συνάρτηση.

<u>Λύση:</u>



Σχεδιάζουμε αρχικά την $g(x)=x^2$ και αποκόπτουμε το τμήμα της για $x>1$. Έπειτα σχεδιάζουμε την $h(x)=\dfrac{1}{x}$ μόνο για $x>1$



Από τη γραφική παράσταση της δεδομένης συνάρτησης f, παρατηρούμε ότι:

- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[0,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Στο διάστημα $[1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f παρουσιάζει:

- ☆ Ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_1 = 0$ και είναι το $f(0) = 0$.
- ☆ Τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_2 = 1$ και είναι το $f(1) = 1$.

8. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση:

Σημεία τομής με τους άξονες

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f τέμνει:

α. Τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$ αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

β. Τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες που είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

Επειδή $f(0) = 0$ η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\boxed{(0,0)}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(x-3)(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -2}$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι:

$$\boxed{(0,0), \quad (3,0), \quad (-2,0)}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=\frac{x-5}{x^2-4}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

<u>Λύση:</u>

α. Πρέπει να είναι:

$$x^2-4\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(x+2)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x\neq 2,\quad x\neq -2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f, είναι:

$$\boxed{A=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)}$$

β.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$f(x)>0$$

και κάτω από τον $x'x$, όταν:

$$f(x)<0$$

Επειδή αναζητούμε τις τιμές του x για τα οποία τα σημεία της C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, πρέπει να είναι:

$$f(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-5}{x^2-4}<0$$

Την παραπάνω ανισότητα, λύνουμε με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$	-2		2		5	$+\infty$
$x-5$	−		−		−	0	+
x^2-4	+	0	−	0	+		+
$f(x)$	−	//	+	//	−	0	+

Άρα η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$\boxed{x<-2 \quad ή \quad 2<x<5}$$

10. Σε μια μελέτη για το περιβάλλον διαπιστώθηκε ότι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα (CO) στον αέρα μιας πόλης δίνεται από τη σχέση:

$$C(x)=0,5\cdot x+1$$

όπου x ο πληθυσμός της πόλης σε χιλιάδες κατοίκους και $C(x)$ εκφράζεται σε ppm (μέρη στο εκατομμύριο).

Εκτιμάται ότι σε t χρόνια από τώρα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι:

$$x(t)=10+0,1\cdot t^2 \quad \text{χιλιάδες}$$

α. Να εκφράσετε την συγκέντρωση του CO συναρτήσει του χρόνου.

β. Πότε η συγκέντρωση αναμένεται να φτάσει τα $6,8$ ppm;

Λύση:

α. Αφού:

$$C(x)=0,5\cdot x+1$$

τότε είναι:

$$C(x(t))=0,5\cdot x(t)+1=0,5\left(10+0,1\cdot t^2\right)+1$$

Άρα:

$$\boxed{C(t)=0,05\cdot t^2+6 \quad \text{ppm}}$$

β. Θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση:

$$C(t)=6,8$$

Άρα:

$$6+0,05\cdot t^2=6,8 \quad \Leftrightarrow \quad 0,05\cdot t^2=0,8 \quad \Leftrightarrow \quad t^2=16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t=4}$$

Άρα σε 4 χρόνια η συγκέντρωση του CO πάνω από την πόλη θα είναι $6,8$ ppm.

11. Υποθέτουμε ότι το συνολικό κόστος παρασκευής α μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$C(\alpha)=\alpha^3-30\alpha^2+500\alpha+200 \qquad (C(\alpha) \quad \text{σε} \quad \text{Euro})$$

α. Να υπολογίσετε το κόστος παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος.

β. Να υπολογίσετε το κόστος παραγωγής της $10^{ης}$ μονάδας του προϊόντος.

Λύση:

Στα πραγματικά προβλήματα, το πεδίο ορισμού προκύπτει και από τα δεδομένα του προβλήματος.

Εδώ πρέπει να είναι $\alpha>0$ αφού **δεν έχει νόημα** να παραχθούν **αρνητικές** μονάδες προϊόντος.

α. Το κόστος παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος δίνεται από την τιμή της συνάρτησης κόστους για $\alpha = 10$. Άρα:

$$C(10) = 10^3 - 30 \cdot 10^2 + 500 \cdot 10 + 200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(10) = 3200 \quad \text{Euro}}$$

β. Το κόστος παραγωγής της $10^{\text{ης}}$ μονάδας είναι η διαφορά μεταξύ του κόστους παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος και 9 μονάδων προϊόντος.

Άρα:

$$Q = \text{Κόστος παραγωγής της 10ης μονάδας} = C(10) - C(9) \quad \Rightarrow$$

$$Q = 3200 - 2999 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 201 \quad \text{Euro}}$$