ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3ου ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad x \ge 0$$

Να βρείτε με τη χρήση του ορισμού, τις παραγώγους:

α. $f'(4)$ β. $f'(x_o)$ με $x_o>0$

<u>Λύση:</u>

Με τη χρήση του ορισμού βρίσκουμε το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

ή το όριο:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

α. Παρατηρούμε ότι:

$$f(4)=\sqrt{4}=2$$

Για $h\neq 0$, είναι:

$$\ell=\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=$$

$$=\frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Άρα:

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{2+2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(4)=\frac{1}{4}}$$

β. Για $h\neq 0$ και $x_o>0$, έχουμε:

$$\ell=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\frac{\sqrt{x_o+h}-\sqrt{x_o}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x_o+h}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x_o+h}^2-\sqrt{x_o}^2}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{x_o+h-x_o}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}}$$

Άρα:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}}\Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x_o)=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}}$$

Αφού δείξαμε ότι για κάποιο $x_o>0$, είναι:

$$f'(x_o)=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

θα ισχύει για κάθε $x>0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

που είναι η παράγωγος της f.

2. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=5x^3+3x^2+6x+9,\quad x\in\mathbb{R}$

β. $f(x)=\dfrac{x^3+10x+7}{x},\quad x\neq 0$

γ. $f(x)=\sqrt[3]{x}+5\ell nx,\quad x>0$

δ. $f(x)=10e^x+35\sqrt{x}+\ell n10,\quad x\geq 0$

<u>Λύση:</u>

α. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x)=5(x^3)'+3(x^2)'+6(x)'+(9)'=5\cdot 3x^2+3\cdot 2x+6\cdot 1+0\Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x)=15x^2+6x+6}$$

β. Συμφέρει η δημιουργία τριών κλασμάτων από τον κανόνα του πηλίκου λόγω πράξεων.

Υπενθύμιση:

$$\frac{1}{x^\nu}=x^{-\nu},\quad x\neq 0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x} + \frac{10x}{x} + \frac{7}{x}\right)' = \left(x^2 + 10 + 7 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 2x + 0 + 7\left(x^{-1}\right)' =$$

$$= 2x + 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = 2x - \frac{7}{x^2}}$$

για κάθε $x \neq 0$.

γ. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 5(\ell nx)' = \frac{1}{3} \cdot x^{1-\frac{1}{3}} + 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x}}$$

Υπενθύμιση:

$$\sqrt[\nu]{x^{\mu}} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$$

για κάθε $x > 0$

δ.

Προσέξτε ότι:
- Το $\ell n10$ είναι σταθερός, άρα έχει παράγωγο μηδέν.
- Το πεδίο ορισμού της παραγώγου δεν είναι πάντα ίδιο με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = 10\left(e^x\right)' + 35\left(\sqrt{x}\right)' + (\ell n10)' = 10e^x + 35\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = 10e^x + \frac{35}{2\sqrt{x}}}$$

για κάθε $x > 0$.

3. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = (2x+1)(3x-2)$ β. $f(x) = 500\left(15 - x^2\right)(3x-2)$

γ. $f(x) = x^5 \cdot e^x$ δ. $f(x) = \left(x^2+1\right)\ell nx, \quad x > 0$

<u>Λύση:</u>

α. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = (2x+1)'(3x-2) + (2x+1)(3x-2)' = 2(3x-2) + (2x+1) \cdot 3 =$$

$$=6x-4+6x+3$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=12x-1 \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

β. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x)=500\left[\left(15-x^2\right)'(3x-2)+\left(15-x^2\right)(3x-2)'\right]=$$

$$500\left[-2x(3x-2)+3\left(15-x^2\right)\right]=500\left(-6x^2+4x+45-3x^2\right)$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=500\left(-9x^2+4x+45\right) \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x)=\left(x^5\right)'e^x+x^5\left(e^x\right)'=5x^4e^x+x^5e^x$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=e^x\left(x^5+5x^4\right) \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

δ. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x)=\left(x^2+1\right)'\ell nx+\left(x^2+1\right)(\ell nx)'=2x\ell nx+\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=2x\ell nx+x+\frac{1}{x} \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x>0}$$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ β. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x},\quad x>0$

γ. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2},\quad x\neq 2$ δ. $g(x)=\dfrac{t^2+1}{1-t^2},\quad t\neq 1,-1$

<u>Λύση:</u>

α. $$f'(x)=\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'e^x-x^2\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\left(2x-x^2\right)}{e^{2x}}$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}, \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

Θα μπορούσε να γραφεί και:
$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$$
και να εφαρμοστεί ο κανόνας του γινομένου.

β. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(\ell nx)'x-\ell nx(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-\ell nx}{x^2}$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\ell nx}{x^2}, \qquad x>0}$$

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}$$

Άρα:

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}, \qquad x\neq 2}$$

δ. Για κάθε $t\in\mathbb{R}$, $t=1,-1$, έχουμε:

$$g'(x)=\frac{(t^2+1)'(1-t^2)-(t^2+1)(1-t^2)'}{(1-t^2)^2}=\frac{2t(1-t^2)+2t(t^2+1)}{(1-t^2)^2}=$$

$$=\frac{2t-2t^3+2t^3+2t}{(1-t^2)}$$

Άρα:

$$\boxed{g'(x)=\frac{4t}{(1-t^2)^2}, \qquad t\neq 1,-1}$$