ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σκοπός:

Σκοπός του κεφαλαίου είναι αρχικά η υπενθύμιση βασικών εννοιών που αφορούν τον ορισμό, τις πράξεις και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αφ' ενός και η μελέτη της συνάρτησης μέσω παραγώγων αφ' εταίρου.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα:

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα πρέπει να μπορείτε:

- Να ορίζετε καλά μια συνάρτηση.
- Να κάνετε πράξεις με συναρτήσεις.
- Να σχεδιάζετε τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.
- Να εξετάζετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις
- Να βρίσκετε την παράγωγο μιας συνάρτησης
- Να βρίσκετε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε κάποιο σημείο της.
- Να βρίσκετε τη μονοτονία και τα ακρότατα (αν υπάρχουν) μιας συνάρτησης.

Έννοιες κλειδιά:

- Πεδίο ορισμού.
- Γραφική παράσταση.
- Όριο.
- Συνέχεια.
- Εφαπτομένη.
- Παράγωγος.
- Μονοτονία.
- Ακρότατα.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

◈ **Σκοπός:**

Σκοπός της ενότητας είναι η υπενθύμιση βασικών στοιχείων που αφορούν τις συναρτήσεις και η σύνδεση τους με «πραγματικά» προβλήματα.

◈ **Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτής της ενότητας, θα πρέπει να μπορείτε:

- Να βρίσκετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.
- Να κάνετε πράξεις με συναρτήσεις.
- Να σχεδιάζετε γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.
- Να ορίζετε την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να μελετάτε τη συνάρτηση από τη γραφική της παράσταση.
- Να συνδέετε «πραγματικά» προβλήματα με συναρτήσεις.

Βασικές έννοιες:

★ Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β;

Απάντηση: Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία **κάθε** στοιχείο του Α, αντιστοιχίζεται σε **ένα ακριβώς** στοιχείο του Β.

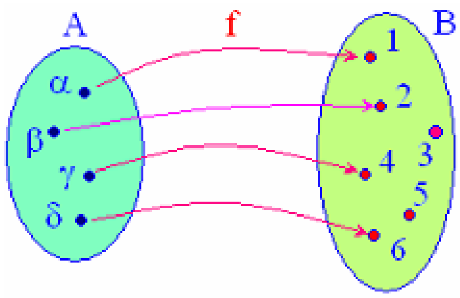
Παρατηρήσεις:

1. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι τα στοιχεία του συνόλου Α πρέπει να **εξαντλούνται.** Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

2. Το σύνολο Β λέγεται σύνολο **άφιξης** και δεν είναι απαραίτητο τα στοιχεία του να εξαντλούνται. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει στοιχείο του Β που δεν έχει **αρχέτυπο** στο σύνολο Α.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΑΘΗΤΩΝ

<u>Παράδειγμα:</u>



Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

$$A = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$$

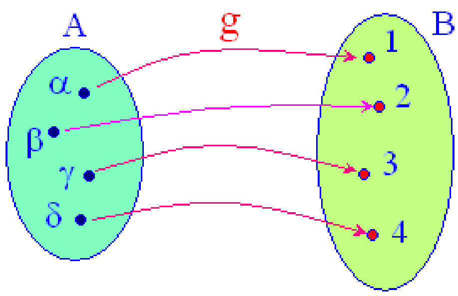
και σύνολο άφιξης, το σύνολο:

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Τα στοιχεία 3, 5 του συνόλου B δεν έχουν αρχέτυπο στο σύνολο A.

3. Αν σε κάποια συνάρτηση τα στοιχεία του συνόλου B εξαντλούνται τότε το B λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

<u>Παράδειγμα:</u>



Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών το B

4. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και σύνολο άφιξης το B συνήθως συμβολίζεται με:

$$f : A \to B$$

★ Πότε μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;**

<u>Απάντηση:</u> Όταν:

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad \text{και} \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

Δηλαδή τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr

Παρατηρήσεις:

1. Στο εξής μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, θα τη λέμε απλά **συνάρτηση.**

2. Αν $f : A \to B$ και $x \in A$, τότε υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$.

Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της f στο x**

3. Για να ορισθεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν:
   - Το πεδίο ορισμού της.
   - Η τιμή της $f(x)$ για κάθε $x \in A$.

4. Όταν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης χωρίς να δίνεται το πεδίο ορισμού της, τότε πρέπει να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για τα στοιχεία του οποίου έχει νόημα ο τύπος.

Μέθοδοι για την εύρεση του πεδίου ορισμού

1. Οι παρανομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός. Για παράδειγμα αν ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x)}$$

τότε πρέπει:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \pi(x) \neq 0\}$$

2. Οι υπόρριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές. Για παράδειγμα αν ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \sqrt{\pi(x)}$$

τότε πρέπει:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \pi(x) \geq 0\}$$

3. Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \ell n(\pi(x))$$

τότε πρέπει:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \pi(x) > 0\}$$

4. Συνδυασμός όλων των παραπάνω περιπτώσεων.

5. Όταν η συνάρτηση αφορά **πραγματικό πρόβλημα** (φυσικής, οικονομίας, γεωμετρίας κ. α.) τότε πρέπει να λαμβάνονται υπ’ όψιν οι ειδικές συνθήκες του προβλήματος.

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr

ΠΡΑΞΕΙΣ

※ Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g : A \to \mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων f και g.

α. Άθροισμα $S = f + g$

β. Διαφορά $D = f - g$

γ. Γινόμενο $P = f \cdot g$

δ. Πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$

<u>Απάντηση:</u>

α. Είναι:

$$S(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

β. Είναι:

$$D(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

γ. Είναι:

$$P(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

δ. Είναι:

$$R(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0$$

※ Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g : B \to \mathbb{R}$$

Πως ορίζεται η σύνθεση της f με την g;

<u>Απάντηση:</u> Η σύνθεση της f με την g (συμβολισμός $g \circ f$) ορίζεται για κάθε $x \in A$ με $f(x) \in B$ και έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

✧ Δίνεται συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy. Τι λέγεται **γραφική παράσταση της f;**

Απάντηση: **Γραφική παράσταση** της f στο σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(\alpha, \beta)$, του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\beta = f(\alpha)$$

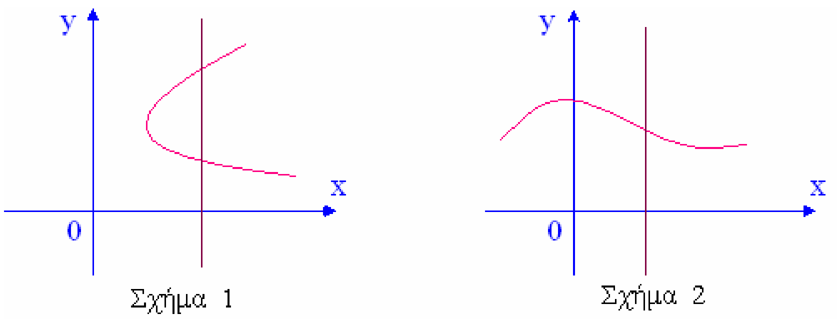
Παρατηρήσεις:

1. Η γραφική παράσταση συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με C_f.

2. Αν δοθεί συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και σημείο $M(\alpha, \beta)$ και μας ζητήσουν να ελέγξουμε αν **μπορεί το σημείο M να ανήκει στη** C_f τότε:
   - ★ Ελέγχουμε αν $\alpha \in A$
   - ★ Αν ισχύει $f(\alpha) = \beta$

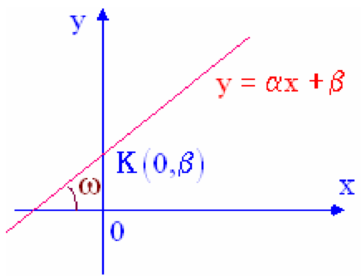
3. Αν δοθεί μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων, αυτή μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο αν οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία στον άξονα των τεταγμένων $y'y$ **τέμνει την γραμμή σε ένα το πολύ σημείο.**

Παράδειγμα:



Η γραμμή στο σχήμα 1 δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, ενώ η γραμμή στο σχήμα 2 μπορεί να είναι.

◈ Γραφικές παραστάσεις «Γνωστών» συναρτήσεων

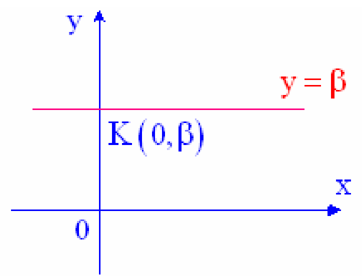


(α) Η καμπύλη της συνάρτησης:

$f(x)=\alpha x+\beta$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0,\beta)$ και έχει συντελεστή:

$\alpha=\varepsilon\varphi\omega$

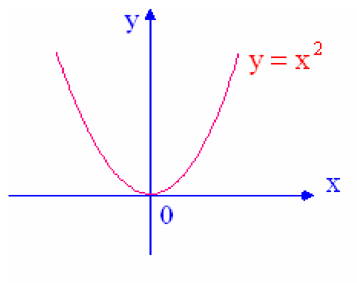


(β) Η γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης:

$f(x)=\beta$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0,\beta)$ και έχει συντελεστή:

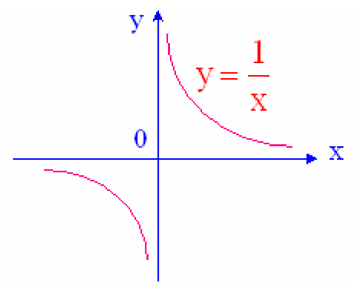
$\alpha=0$



(γ) Η γραφική παράσταση της:

$f(x)=x^2, \quad x\in\mathbb{R}$

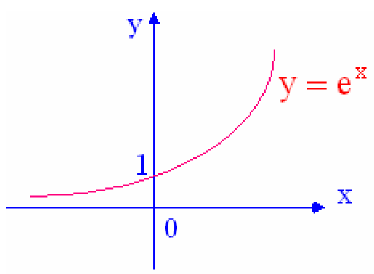
Είναι παραβολή.



(δ) Η γραφική παράσταση της:

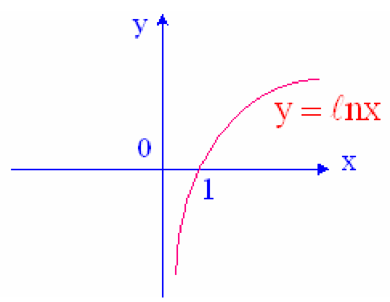
$f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in\mathbb{R}^*$

Είναι υπερβολή.



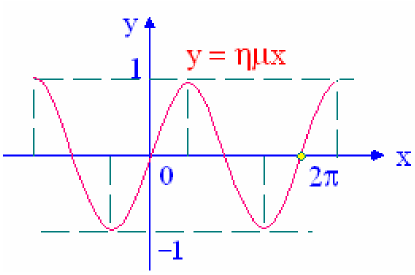
(ε) Είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής:

$f(x)=e^x, \quad x\in\mathbb{R}$



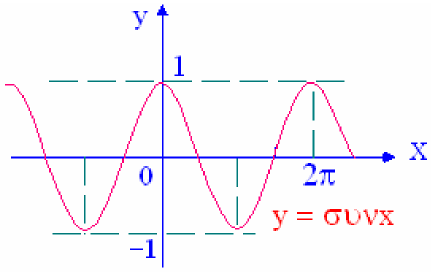
(στ) Είναι η γραφική παράσταση της λογαριθμικής:

$f(x)=\ell nx, \quad x\in(0,+\infty)$



(ζ) Είναι η γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης:

$f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$



(η) Είναι η γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης:

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

✷ Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα **διάστημα Δ** του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$, όταν για **οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$\text{αν} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

✷ Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα **διάστημα Δ** του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

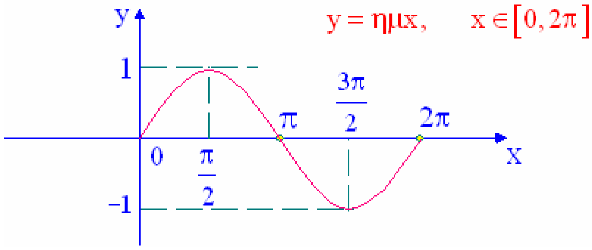
$$\text{αν} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Παρατηρήσεις:

1. Μια συνάρτηση που είναι **γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα** λέγεται **γνησίως μονότονη**

2. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο (ή κάποια) διάστημα (ή διαστήματα) του πεδίου ορισμού της και ταυτόχρονα να είναι γνησίως φθίνουσα σε κάποιο άλλο.

Παράδειγμα:



Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x,\quad x\in[0,2\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα:

$$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$$

ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα:

$$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$$

3. Η **μελέτη** της **μονοτονίας** μιας **συνάρτησης** γίνεται εύκολα με τη βοήθεια της **παραγώγου** όπως θα δούμε στη συνέχεια.

✷ Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_1 $(x_1\in A)$;

Ποιο είναι το τοπικό **μέγιστο;**

<u>Απάντηση:</u> Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ **παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο** $x_1\in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_1 **του** x_1 τέτοια ώστε:

$$U_1\subseteq A \quad \text{και} \quad f(x)\le f(x_1) \quad \text{για κάθε} \quad x\in U_1$$

Το **τοπικό μέγιστο** είναι το $f(x_1)$.

✷ Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο** x_2 $(x_2\in A)$**;**

Ποιο είναι το **τοπικό ελάχιστο;**

<u>Απάντηση:</u> Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι **παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο** $x_2\in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_2 **του** x_2 τέτοια ώστε:

$$U_2\subseteq A \quad \text{και} \quad f(x)\ge f(x_2) \quad \text{για κάθε} \quad x_2\in U_2$$

Το **τοπικό ελάχιστο** είναι το $f(x_2)$.

<u>**Παρατηρήσεις:**</u>

1. Η περιοχή U_1 του x_1 μπορεί να είναι ένα διάστημα της μορφής:

$$(\alpha,\beta) \ \text{με} \ \alpha<x_1<\beta \ \text{ή} \ [x_1,\beta) \ \text{ή} \ (\alpha,x_1] \ \text{ή} \ (x_1,\beta) \ \text{ή} \ (\alpha,x_1)$$

ή ακόμη η ένωση διαστημάτων $(\alpha,x_1)\cup(x_1,\beta)$

2. Αν για τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ υπάρχει $x_1\in A$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_1)\ge f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in A$$

τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο x_1.

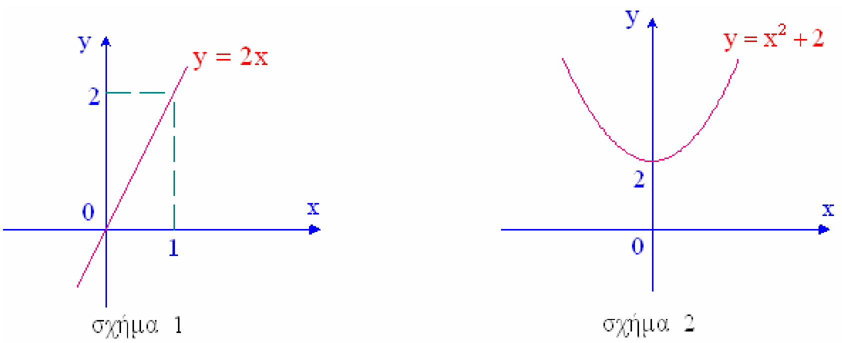
Το **ολικό μέγιστο** είναι το $f(x_1)$.

Ανάλογα ορίζεται και **ολικό ελάχιστο.**

3. Τα τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και τα αντίστοιχα ολικά λέγονται απλά **ακρότατα** της συνάρτησης.

4. Μια συνάρτηση **δεν είναι απαραίτητο** να έχει **ακρότατα**. Μπορεί **να έχει μέγιστο και να μην έχει ελάχιστο** (ή το αντίθετο).

<u>Παραδείγματα:</u>



Από τη γραφική παράσταση της $f(x)=2x, \quad x \in \mathbb{R}$ (σχήμα 1) φαίνεται ότι η συνάρτηση f **δεν έχει ακρότατα.**

Από τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2+2, \quad x \in \mathbb{R}$ (σχήμα 2) φαίνεται ότι η συνάρτηση g **παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο** $x_o=0$ και το ελάχιστο είναι:

$$\boxed{g(0)=2}$$