ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
fast & easy

ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η επίγνωση του εν δυνάμει εφικτού

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Διωνυμικό πείραμα : είναι κάθε πείραμα με δυο αποτελέσματα, όπου οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
Εμφανίζεται με τις εκφράσεις : *συμβαίνει κάτι ή δεν συμβαίνει, επιτυχία ή αποτυχία, καλό ή ελαττωματικό, αποδεκτό ή μη αποδεκτό.*

Πιθανότητα επιτυχίας : είναι η πιθανότητα p να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός σε μια δοκιμή του πειράματος τύχης, ενώ η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το γεγονός είναι q =1-p και λέγεται **πιθανότητα αποτυχίας**.

π.χ. Στη ρίψη ενός ζαριού θέλουμε να φέρουμε εξάρι. Πιθανότητα επιτυχίας (φέρνουμε εξάρι) : p=1/6. Πιθανότητα αποτυχίας (δεν φέρνουμε εξάρι) : q=1-p=5/6

moda: Το διωνυμικό πείραμα αποτελεί τη βάση των κατανομών : Bernoulli, διωνυμική και γεωμετρική.

1η) Κατανομή Bernoulli : X~B(1,p)

Όταν έχουμε διωνυμικό πείραμα και θέλουμε σε διαδοχικά πειράματα την πιθανότητα επιτυχίας αυτή δίνεται από :

$$P(X=\kappa)=p^{\kappa}(1-p)^{1-\kappa} \qquad \kappa=0,1$$

Για κ=0 η πιθ/τα επιτυχίας είναι : P(X=0)=1-p
Για κ=1 η πιθ/τα επιτυχίας είναι : P(X=1)=p

2η) Διωνυμική κατανομή: X~B(n,p)

Στο διωνυμικό πείραμα που επαναλαμβάνεται n-φορές όταν ζητάμε να έχουμε κ αριθμό επιτυχιών ($0\le\kappa\le n$), η πιθανότητα δίνεται από τη σχέση :

$$P(X=\kappa)=\binom{n}{\kappa}p^{\kappa}(1-p)^{n-\kappa}$$

Μέση τιμή : E(X)=np
Διασπορά : $V(X)=\sigma^2=npq$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Στα προβλήματα η διωνυμική κατανομή συνήθως δεν λέγεται με το όνομά της.
- Επίσης μπορεί να είναι το 2ο ερώτημα μετά την εύρεση της πιθανότητας p από άλλη κατανομή (π.χ. κανονική).

Εύρεση των (p,n,κ) με τα εξής βήματα :

1ο) Διαπιστώνουμε ότι έχουμε διωνυμικό πείραμα (άμεσα ή έμμεσα) με επιτυχία p και αποτυχία q=1-p.
2ο) Ξεκαθαρίζουμε τον αριθμό των δοκιμών n (επαναλήψεις του πειράματος τύχης ή τυχαία επιλογή στοιχείων) και τον αριθμό των ζητούμενων επιτυχιών κ. Οπότε από τον τύπο της διωνυμικής κατανομής προκύπτει το ζητούμενο.
3ο) Προσέχουμε τις εκφράσεις :
Ο αριθμός των επιτυχιών είναι το **πολύ κ** π.χ. Αν η κ=2 δηλ. $X\le 2$ τότε :

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

Ο αριθμός των επιτυχιών είναι **τουλάχιστον κ** π.χ. Αν κ=2 δηλ. $X\ge 2$ τότε :

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$$

π.χ. Από μια παραγωγή το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι 10%. Η πιθανότητα (ποσοστό) να είναι ελαττωματικό είναι p=0,1. Αν πάρουμε τυχαία 3 προϊόντα, να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε : **α)** κανένα **β)** ένα **γ)** δυο **δ)** τρία ελαττωματικά προϊόντα.

Πιθανότητα επιτυχίας : p=0,1 (να έχουμε ελαττωματικό προϊόν). Πιθανότητα αποτυχίας : q=1-p=0,9. Έχουμε n=3 δοκιμές.

α) Για κ=0, παίρνουμε :

$$P(X=0)=\binom{3}{0}(0{,}1)^{0}\cdot(0{,}9)^{3}=0{,}729$$

β) Για κ=1, παίρνουμε : P(X=1)=0,243
γ) Για κ=2, παίρνουμε : P(X=2)=0,027
δ) Για κ=3, παίρνουμε : P(X=3)=0,001

3η) Γεωμετρική Κατανομή : X~Ge(p)

Όταν το διωνυμικό πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία, οπότε και τερματίζεται, τότε έχουμε γεωμετρική κατανομή. Η τ.μ. X που εκφράζει τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία έχει σ.π.:

$$P(X=\kappa)=pq^{\kappa-1} \qquad \kappa=1,2,...$$

όπου p : πιθανότητα επιτυχίας και q=1-p

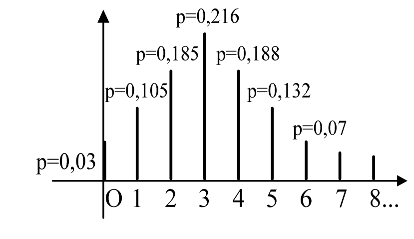
4η) Κατανομή Poisson : X~P(λ)

Όταν σε ένα πείραμα τύχης δίνεται ο **μέσος όρος λ** των συμβάντων σ' ένα **χρονικό** ή **χωρικό διάστημα** π.χ. ο αριθμός των κλήσεων σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο στο χρονικό διάστημα 10 με 11 το πρωί, τότε είναι πιθανόν τα πρόκειται για κατανομή Poisson. Σ' αυτήν την περίπτωση η πιθανότητα να συμβούν κ γεγονότα στο ίδιο διάστημα δίνεται από την πιθανότητα:

$$P(X=\kappa)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \qquad \kappa=0,1,2,...$$

Μέση τιμή : E(x)=λ
Διασπορά : V(x)=λ

π.χ. Ο μέσος όρος των ατυχημάτων σ' ένα σταυροδρόμι είναι 3,5 ατυχήματα το χρόνο. Οι πιθανότητες για κανένα, ένα, δυο,…κοκ ατυχήματα δίνονται από την κατανομή Poisson και είναι :



Συμβουλή : Ο μέσος όρος λ στο χρόνο (t_o) ή στο χώρο (x_o) μας οδηγεί στην κατανομή Poisson. Προσέχουμε μήπως έχουμε πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο των t_o, x_o δηλ. at_o ή ax_o οπότε και η σταθερή λ για το αντίστοιχο διάστημα γίνεται αλ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1η) Όταν για την τ.μ. X της οποίας ζητάμε την πιθανότητα έχουμε αναφορά σε μέσο όρο ή μέση τιμή λ, τότε οδηγούμαστε στην κατανομή Poisson.
2η) Ελέγχουμε αν ο δοσμένος μέσος όρος λ έχει την ίδια βάση αναφοράς με το ζητούμενο (ίσο χρόνο ή χώρο). Αν όχι τότε κάνουμε αναγωγή του δοσμένου στον ζητούμενο. (βλέπε συμβουλή)
π.χ. Αν κατά μέσο όρο 3 ατυχήματα συμβαίνουν στη διάρκεια 2 μηνών τότε ο μ.ο. των ατυχημάτων λ για διάρκεια 30 ημερών είναι : λ=1,5 (2 μήνες = 60 ημέρες).
3η) Όταν η πιθανότητα δίνεται από τον αναγωγικό τύπο της μορφής :

$$P(X+1)=\frac{\lambda}{x+1}P(X) \quad \text{με} \quad P(0)=e^{-\lambda}$$

τότε έχουμε κατανομή Poisson.

5η) Υπεργεωμετρική Κατανομή: X~H(N,κ,ν)

Παίρνουμε N αντικείμενα από έναν πληθυσμό και τα χωρίζουμε σε δυο κατηγορίες με πλήθος κ και N-κ. Εκλέγουμε τυχαία ένα δείγμα μεγέθους ν από τα N αντικείμενα και ζητάμε την πιθανότητα τα x αντικείμενα να ανήκουν στη πρώτη κατηγορία και τα ν-x στη δεύτερη. Η σ.π. είναι:

$$P(X=x)=\frac{\binom{\kappa}{x}\cdot\binom{N-\kappa}{\nu-x}}{\binom{N}{\nu}} \qquad x=0,1,...,\nu$$

Αφού : $\binom{N}{\nu}$ είναι οι δυνατές περιπτώσεις εκλογής των ν-αντικειμένων από τα N (συνδυασμοί).

Όμοια για τα : $\binom{\kappa}{x}$ και $\binom{N-\kappa}{\nu-x}$ έχουμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις εκλογής των x και ν-x από τα κ και N-κ αντίστοιχα. Όλες μαζί οι ευνοϊκές είναι το γινόμενο τους (ανεξάρτητα).

π.χ. Σ' ένα δοχείο υπάρχουν 100 στυλό, από τα οποία τα 8 δεν γράφουν και τα 92 γράφουν. Εκλέγουμε τυχαία 5 στυλό, να βρεθεί η πιθανότητα να πάρουμε 3 στυλό καλά (να γράφουν) και 2 ελαττωματικά.
Έχουμε N=100, κ=92, ν=5 και x=3 οπότε:

$$P(X=3)=\frac{\binom{92}{3}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{100}{5}}=0{,}047$$

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

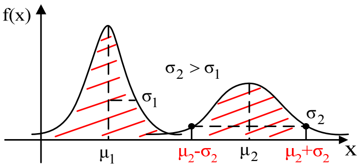
1^{η}) Κανονική Κατανομή : X~N(μ,σ²)

Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο R ($x \in (-\infty,+\infty)$)
και συμβολίζουμε : τ.μ. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
(μ : μέση τιμή, σ^2 : διασπορά) με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου : $\pi \cong 3{,}14$ και $e \cong 2{,}718$.

Η γραφική παράσταση είναι μια «καμπάνα» με κέντρο τη μέση τιμή και άνοιγμα μικρό ή μεγάλο ανάλογα με την τυπική απόκλιση σ.



Παρατηρήσεις – Σχόλια

1^{o}) Η κατανομή είναι **συμμετρική** ως προς τη μέση τιμή.

2^{o}) Το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του x-άξονα είναι ίσο με ένα.
$P(-\infty < x < \infty) = 1$

3^{o}) Από τη συμμετρία έχουμε :
$P(X \le \mu) = 0{,}5$, $P(X \ge \mu) = 0{,}5$

4^{o}) Όσο μεγαλώνει η τυπική απόκλιση σ τόσο αυξάνει και το άνοιγμα της «καμπάνας». Δηλαδή έχουμε αύξηση της πιθανότητας παρατηρήσεων μακριά από τη μέση τιμή.

5^{o}) Ο κύριος όγκος των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (μ-σ, μ+σ). Διότι :
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \cong 0{,}6826$

Τυποποιημένη κανονική κατανομή: Z~N(0,1)

Όταν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=0 και διασπορά $\sigma^2=1$ (τυπική απόκλιση σ=1) τότε έχουμε την **τυποποιημένη κανονική** κατανομή τ.μ. $Z \sim N(0,1)$ με σ.π.π.

$$f(z) = (1/\sqrt{2\pi})\ e^{-\frac{z^2}{2}}$$

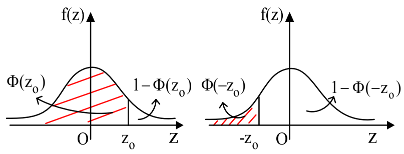
Από τον πίνακα της τυποποιημένης κατανομής (δίνεται) βρίσκουμε την πιθανότητα από την συνάρτηση κατανομής $\Phi(z_o) = P(Z \le z_o)$.

z	0,00	0,01…………0,09
0,0	0,5000	0,5040 ………0,5359
.	………………………………	
0,5	0,6915	0,6950 ………0,7224
.	………………………………	
1,0	0,8413	0,8438 ………0,8621
.	………………………………	

Η κατακόρυφη στήλη είναι η τιμή του z με το 1^{o} δεκαδικό ψηφίο και η οριζόντια με το 2^{o} δεκαδικό του ψηφίο. Οι τιμές του πίνακα είναι πιθανότητες από το $-\infty$ μέχρι την τιμή που αναφερόμαστε, δηλαδή η Φ(z) π.χ.
$\Phi(0{,}09) = P(Z \le 0.09) = 0.5359$
$\Phi(0{,}51) = P(Z \le 0{,}51) = 0{,}6950$
$\Phi(1) = P(Z \le 1) = 0{,}8413$

Χρήση του πίνακα

α) Για $Z = z_o \ge 0$
$P(Z \le z_o) = \Phi(z_o) \ge 0{,}5$
$P(Z \ge z_o) = 1 - \Phi(z_o) \le 0{,}5$



β) Για $Z = -z_o \le 0$
$P(Z \le -z_o) = \Phi(-z_o) = 1 - \Phi(z_o) \le 0{,}5$
$P(Z \ge -z_o) = 1 - \Phi(-z_o) = \Phi(z_o) \ge 0{,}5$

Λόγω συμμετρίας έχουμε συμπληρωματικές σχέσεις πιθανοτήτων για αντίθετες τιμές δηλαδή:

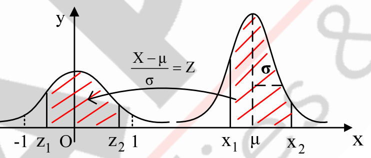
$$\Phi(z_o) = 1 - \Phi(-z_o)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ (Εύρεση Πιθανότητας)

Η πιθανότητα $P(x_1 \le X \le x_2)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί από την σ.π.π. με ολοκλήρωση. Γι' αυτό από την τ.μ. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ αναγόμαστε στο τύπο της τυποποιημένης τ.μ. $Z \sim N(0,1)$ ως εξής :

- Αφαιρούμε τη μέση τιμή (αναγωγή στο μηδέν : μ=0)
- Διαιρούμε με την τυπική απόκλιση (κανονικοποίηση : σ=1) Δηλαδή :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = Z$$



π.χ.

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= P(z_1 \le Z \le z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Πρόβλημα ορίου εγγύησης – ασφάλειας

Έστω ότι το προϊόν x ακολουθεί την κανονική κατανομή. Μετά από μελέτη οικονομικών και στατιστικών δεδομένων σε μια εταιρεία δίνεται το ποσοστό των προϊόντων p% που μπορούν να αντικατασταθούν - ασφαλιστούν. Ζητείται να βρεθεί η διάρκεια x_o της εγγύησης-ασφάλειας όταν έχουμε :

α) Το ποσοστό p να **μην υπερβαίνει** την τιμή x_o δηλαδή : $P(X \le x_o) = p$
Αναγωγή στην τυποποιημένη κατανομή :

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_o-\mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow P(Z \le z_o) = p$$

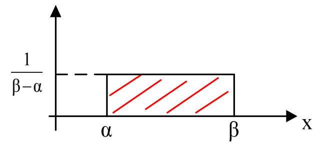
Για $p \ge 0{,}5 \Rightarrow z_o \ge 0$. Τότε $x_o \ge \mu$
Για $p \le 0{,}5 \Rightarrow z_o \le 0$. Τότε $x_o \le \mu$

β) Το ποσοστό p να **υπερβαίνει** την τιμή x_o δηλαδή : $P(X \ge x_o) = p \Rightarrow P(Z \ge z_o) = p$
Για $p > 0{,}5 \Rightarrow z_o < 0$. Τότε $x_o < \mu$
Για $p < 0{,}5 \Rightarrow z_o > 0$. Τότε $x_o > \mu$

2^{η}) Ομοιόμορφη κατανομή : X~U(α,β)

Η συνεχής τ.μ. x ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [α,β] αν έχει σ.π.π. την :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & x \in [\alpha,\beta] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Μέση τιμή : $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$

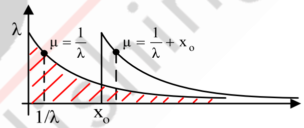
Διασπορά : $\sigma^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

3^{η}) Εκθετική Κατανομή: X~E(λ)

Η συνεχής τ.μ. ακολουθεί την εκθετική κατανομή όταν η σ.π.π. για λ>0 είναι :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Μέση τιμή : $E(X) = 1/\lambda$



Διασπορά : $V(X) = 1/\lambda^2$
Η συνάρτηση κατανομής είναι :

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- Εκθετική κατανομή μετατοπισμένη κατά x_o :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_o)}, \quad x > x_o$$

τότε $\mu = \frac{1}{\lambda} + x_o$ (μετατόπιση της μέσης τιμής κατά x_o) και $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

4^{η}) Γάμμα κατανομή : X~G(α,p)

Η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α,p>0 και σ.π.π. την :

$$f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad x \ge 0$$

$$\mu = \frac{p}{\alpha}, \quad \sigma^2 = \frac{p}{\alpha^2}$$

Θυμίζουμε ότι : $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$
ειδικά όταν $n \in N$ έχουμε : $\Gamma(n) = (n-1)!$
$0! \underset{o\rho\sigma}{=} 1$, Γ(1)=1, Γ(2)=1, Γ(3)=2!=2

5^{η}) Βήτα κατανομή : X~b(p,q)

Η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους p,q>0 και σ.π.π. την

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad 0 \le x \le 1$$

$$\mu = \frac{p}{p+q}, \quad \sigma^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$