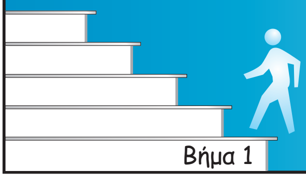


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Θεωρία 1

Αν $A(x_1y_1)$ και $B(x_2y_2)$ είναι δύο σημεία σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Να υπολογίσετε την απόσταση (ΑΒ) των σημείων Α, Β με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους.

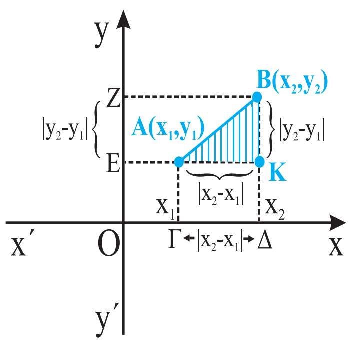
Λύση:

- Έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν είναι παράλληλο στους άξονες.
  Στο ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΚ** εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$(AB)^2 = (AK)^2 + (BK)^2$ **(1)**

όμως: $(AK)^2 = (\Gamma\Delta)^2 = |x_2 - x_1|^2$ **(2)**

$(BK)^2 = (EZ)^2 = |y_2 - y_1|^2$ **(3)**



Άρα: **(1)** $\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}} (AB)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \textbf{(4)}$$

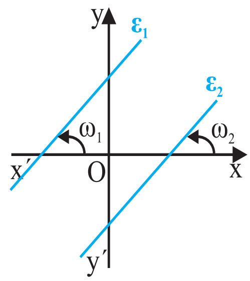
Θεωρία 2

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$, $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ β) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$

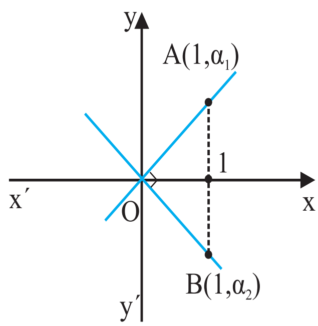
Απάντηση:

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

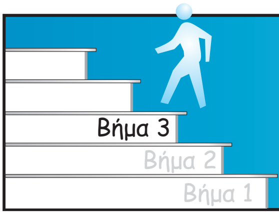


β) Ας θεωρήσουμε δυο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = \alpha_1 x$ και $y = \alpha_2 x$ αντίστοιχα.
Προφανώς το σημείο $A(1, \alpha_1)$ ανήκει στην ευθεία $y = \alpha_1 x$ και $B(1, \alpha_2)$ ανήκει στην ευθεία $y = \alpha_2 x$.
Αφού οι ευθείες είναι κάθετες, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο επομένως, σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + 1^2 + \alpha_2^2 + 1^2 =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (1-1)^2 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + 1 + \alpha_2^2 + 1 =$$
$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \Leftrightarrow 2 = -2\alpha_1\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 = -1$$



Από την απόδειξη γίνεται φανερό ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν $\alpha_1\alpha_2 = -1$, τότε οι ευθείες $y = \alpha_1 x$ και $y = \alpha_2 x$ είναι κάθετες.
Γενικότερα, επειδή οι ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες προς τις $y = \alpha_1 x$ και $y = \alpha_2 x$ αντιστοίχως, συμπεραίνουμε ότι :
Δυο ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_1\alpha_2 = -1$



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\alpha$ με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν η τιμή της f για $x=1$ είναι διπλάσια της τιμής της f για $x=2$ ελαττούμενης κατά 7, βρείτε το α.

ii. Λύστε (με άγνωστο το y) την ανίσωση: $f(-3)|2y-f(1)|+15>0$.

iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση:

i. Ισχύει: $f(1)=2f(2)-7 \Leftrightarrow 2+\alpha=2(4+\alpha)-7 \Leftrightarrow 2+\alpha=8+2\alpha-7 \Leftrightarrow 1=\alpha$

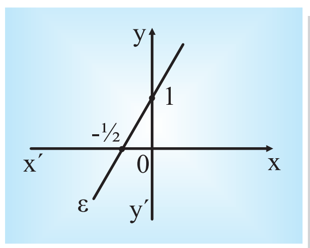
Οπότε: $f(x)=2x+1$, με $x\in\mathbb{R}$

ii. $f(-3)|2y-f(1)|+15>0 \Leftrightarrow -5|2y-3|+15>0 \Leftrightarrow$

$-5|2y-3|>-15 \Leftrightarrow |2y-3|<3 \Leftrightarrow -3<2y-3<3 \Leftrightarrow 0<2y<6 \Leftrightarrow 0<y<3$

iii. Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία με εξίσωση $y=2x+1$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$:

- στο A(0,1) και τον $y'y$
- στο $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$



2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{2x^3-16}{\sqrt{6-2|x-1|}+1}$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Δείξτε ότι: $\dfrac{f(3)+f(-1)}{20}=\sqrt{2}-1$

iii. Βρείτε τα σημεία Α, Β στα οποία η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει

τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, καθώς και την απόσταση (AB).

iv. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα σημεία A, B.

Λύση:

i. Λύνουμε την ανισότητα:

$$6-2|x-1|>0$$
$$-2|x-1|>-6$$
$$|x-1|<3$$
$$-3<x-1<3$$
$$-2<x<4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το (–2,4)

ii. Ισχύουν: $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^3-16}{\sqrt{6-4}+1}=\dfrac{38}{\sqrt{2}+1}$ και

$$f(-1)=\frac{2\cdot(-1)^3-16}{\sqrt{6-4}+1}=\frac{-18}{\sqrt{2}+1}$$

Οπότε: $f(3)+f(-1)=\dfrac{20}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{20\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=20\left(\sqrt{2}-1\right)$

Άρα: $\dfrac{f(3)+f(-1)}{20}=\dfrac{20\left(\sqrt{2}-1\right)}{20}=\sqrt{2}-1$

iii. ***Για τον άξονα y΄y:***

Βρίσκουμε το $f(0)=\dfrac{-16}{\sqrt{4}+1}=-\dfrac{16}{3}$, άρα η C_f τέμνει τον y΄y στο $B\left(0,-\dfrac{16}{3}\right)$.

Για τον άξονα x΄x:

Λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-16=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

Άρα η C_f τέμνει τον x΄x στο A(2,0).

Οπότε: $(AB)=\sqrt{(2-0)^2+\left(0-\dfrac{-16}{3}\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{256}{9}}=\dfrac{\sqrt{292}}{3}$

iv. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα A,B τότε:

- $B\left(0,-\dfrac{16}{3}\right)(\varepsilon) \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3}=\beta$,
- $A(2,0)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 0=2\alpha+\beta \Leftrightarrow 2\alpha=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{8}{3}$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y=\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}$.

3. Δίνεται το σημείο $M\left(6\alpha^2-5\alpha+1,\ 2\alpha\right)$.

i. Αν ξέρετε ότι ανήκει στον άξονα y΄y βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii. Για την μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε για το α, βρείτε το $\beta\in\mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+\beta$ με $x\in\mathbb{R}$ τέμνει τον y΄y στο M.

iii. Βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

Λύση:

i. Το $M\left(6\alpha^2-5\alpha+1,\ 2\alpha\right)$ ανήκει στον άξονα y΄y, αν και μόνον αν,

$$6\alpha^2-5\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6} \Leftrightarrow \alpha=\frac{5\pm 1}{12} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2} \quad ή \quad \alpha=\frac{1}{3}$$

ii. Για $\alpha=\frac{1}{2}$ έχουμε $M(0,1)$ το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση της f, οπότε:

$$f(0)=1 \Leftrightarrow \sqrt{4}+\beta=1 \Leftrightarrow 2+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=-1$$

Άρα: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-1$ ή

$f(x)=\sqrt{(x-2)^2}-1$ ή

$f(x)=|x-2|-1$, με $x\in\mathbb{R}$

iii. Λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-2|-1=0 \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow$

$x-2=1$ ή $x-2=-1 \Leftrightarrow$

$x=3$ ή $x=1$

Άρα τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα x΄x είναι τα A(3,0) και B(1,0).

4. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon):\ y=|2\lambda-1|x+3\lambda$
$(\delta):\ y=3x+2$

i. Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες ε, δ είναι παράλληλες.

ii. Για την μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε για το λ βρείτε το σημείο τομής

των ευθείων (ε) και (ζ): $y=2x+5$ το οποίο να ονομάσετε Α.

iii. Αν το Α ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-\mu^2x+\mu$ με $x\in\mathbb{R}$, βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$.

iv. Για την μικρότερη τιμή που βρήκατε για το μ βρείτε την απόσταση (ΑΒ) με Β το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f και του άξονα y΄y.

Λύση:

i. $\varepsilon \parallel \delta \Leftrightarrow |2\lambda-1|=3 \Leftrightarrow 2\lambda-1=3$ ή $2\lambda-1=-3$

$2\lambda=4$ ή $2\lambda=-2$

$\lambda=2$ ή $\lambda=-1$

ii. Εφόσον $\lambda=2$ η εξίσωση της (ε) γράφεται $y=3x+6$ οπότε λύνουμε την έξισωση: $3x+6=2x+5 \Leftrightarrow x=-1$ άρα $y=3$ οπότε το κοινό σημείο των (ε), (ζ) είναι το Α(–1,3).

iii. Το Α(–1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση της f άρα:

$$f(-1)=3 \Leftrightarrow 1+\mu^2+\mu=3 \Leftrightarrow \mu^2+\mu-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\mu=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \mu=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \mu=1 \text{ ή } \mu=-2$$

iv. Εφόσον $\mu=-2$ έχουμε $f(x)=x^2-4x-2$ οπότε $f(0)=-2$. Άρα η C_f' τέμνει τον y΄y στο $B(0,-2)$, οπότε $(AB)=\sqrt{(-1-0)^2+\left(3-(-2)\right)^2}=\sqrt{26}$.

5. i. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(–1,1). Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από αυτά.

ii. Δίνεται τώρα και η ευθεία $(\delta): y=\left(\lambda^2+3\lambda-6\right)x+2\lambda+1$ πως είναι κάθετη με την (ε) βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii. Για την μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε για το λ βρείτε το κοινό σημείο των (ε), (δ)

iv. Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάστε τις (ε), (δ).

Λύση:

i. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας (ε) τότε το $A(1,2)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 2=\alpha+\beta$, $B(-1,1)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 1=-\alpha+\beta$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ -\alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=3 \\ \alpha=2-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\dfrac{3}{2} \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Άρα η εξίσωση της (ε) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

ii. Ισχύει $\varepsilon \perp \delta$ άρα: $(\lambda^2+3\lambda-6)\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-6=-2 \Leftrightarrow$

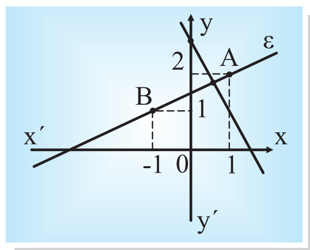
$\lambda^2+3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow$

$\lambda=1$ ή $\lambda=-4$

iii. Αν $\lambda=1$ η εξίσωση της (δ) γράφεται $y=-2x+3$ οπότε λύνουμε την εξίσωση:

$$-2x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow -4x+6=x+3 \Leftrightarrow -5x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.\ \text{Τότε}\ y=\frac{9}{5}$$

Άρα το κοινό σημείο των ε, δ είναι το $K\left(\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$.



6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}$ με $x\in\mathbb{R}$

i. Γράψτε τον τύπο της f σε πολλαπλή μορφή.

ii. Κάντε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

i. Είναι: $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$

$f(x)=|x-1|+|x+2|$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

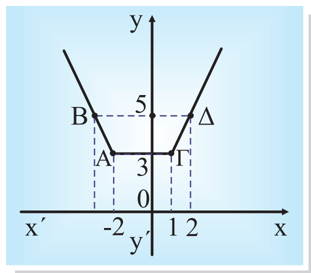
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \\ -x+1, & \text{αν } x-1\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ -x-2, & \text{αν } x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{cases}$$

Από τα παραπάνω σχηματίζουμε το επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … $+\infty$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f(x)$	$-x+1-x-2=$ $-2x-1$	$-x+1+x+2=3$	$x-1+x+2=$ $2x+1$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{αν } x \leq -2 \\ 3 & \text{αν } -2 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$



ii. Η γραφική παράσταση f αποτελείται από:

1. Την ημιευθεία με εξίσωση $\boxed{y=-2x-1, \text{ αν } x \leq -2}$ με αρχή το $A(-2,3)$, ενώ περνάει και από το σημείο $B(-3,5)$.

2. Το ευθύγραμμο τμήμα με εξίσωση $\boxed{y=3, \text{ αν } -2 \leq x \leq 1}$ που έχει άκρα τα $A(-2,3)$ και $\Gamma(1,3)$.

3. Την ημιευθεία με εξίσωση $\boxed{y=2x+1, \text{ αν } x \geq 1}$ που έχει αρχή το $\Gamma(1,3)$.

7. Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^3+x-6}{x^2+x+1}$ και η ευθεία (ε): $y=2x-3$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Βρείτε τα κοινά σημεία της (ε) και της γραφικής παράστασης της f έστω C_f

iii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που τέμνει κάθετα την (ε) στο κοινό σημείο της με την C_f το οποίο έχει την μεγαλύτερη τετμημένη.

Λύση:

i. Επειδή η εξίσωση $x^2+x+1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$ είναι αδύνατη, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Λύνουμε την εξίσωση: $\frac{2x^3+x-6}{x^2+x+1}=2x-3 \Leftrightarrow$

$$2x^3+x-6=(2x-3)(x^2+x+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^3+x-6=2x^3+2x^2+2x-3x^2-3x-3 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=-3,$$

Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με την C_f είναι τα: Α(1,–1) και Β(–3,9).

iii. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της δ τότε:

- $\varepsilon \perp \delta \Leftrightarrow 2\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$

- Το $A(1,-1)$ ανήκει στην (δ) άρα $-1=\alpha+\beta \Leftrightarrow \beta=-1-\alpha=-\frac{1}{2}$

Άρα η εξίσωση της (δ) είναι η $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

8. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(–2,–3) και Γ(λ–1, 5)

i. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ii. Βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x το οποίο να ισαπέχει από τα Α, Γ.

Λύση:

i. Έστω $\boxed{y=\alpha x+\beta}$ η εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα Α,Β τότε:

$$A(1,3)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 3=\alpha+\beta$$
$$B(-2,-3)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -3=-2\alpha+\beta$$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\-2\alpha+\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+2\beta=6\\-2\alpha+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\\alpha=2\end{cases}$

Άρα η εξίσωση της (ε) είναι η $\boxed{y=2x+1}$.

- Τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν το $\Gamma(\lambda-1,5)$ ανήκει στην (ε):

  Δηλαδή $5=2(\lambda-1)+1 \Leftrightarrow 4=2\lambda-2 \Leftrightarrow 6=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=3$, άρα $\Gamma(2,5)$

ii. Έστω $M(\alpha,0)$ σημείο του άξονα x΄x ώστε:

$$(MA)=(M\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{(\alpha-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{(\alpha-2)^2+(-5)^2}\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)^2+9=(\alpha-2)^2+25\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1+9=\alpha^2-4\alpha+4+25\Leftrightarrow$$

$$2\alpha=19\Leftrightarrow\alpha=\frac{19}{2}\ \text{άρα}\ M\left(\frac{19}{2},0\right)$$

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x-1=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2 καθώς και οι ευθείες $\varepsilon_1: 2y=\left(\rho_1^2+\rho_2^2\right)x+20$ και $\varepsilon_2: y=\left((\alpha-1)^2+2|\alpha-1|\right)x+6$

i. Αν οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες, βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ε_2 με τους άξονες.

Λύση:

i. Ισχύουν $\rho_1+\rho_2=-\frac{-2}{1}=2$ και $\rho_1\rho_2=-\frac{1}{1}$

Οπότε: $\rho_1^2+\rho_2^2=\left(\rho_1+\rho_2\right)^2-2\rho_1\rho_2=2^2-2(-1)=4+2=6$

Άρα $2y=6x+20\Leftrightarrow\boxed{y=3x+10}$ είναι η εξίσωση της ε_1.

Οπότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow(\alpha-1)^2+2|\alpha-1|=3\Leftrightarrow|\alpha-1|^2+2|\alpha-1|-3=0$

Θέτουμε $\boxed{y=|\alpha-1|}$ και η εξίσωση γίνεται $y^2+2y-3=0$

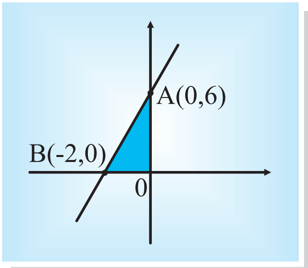
Είναι: $y^2+2y-3=0\Leftrightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{-2\pm4}{2}\Leftrightarrow y=1$ ή $y=-3$

Άρα $|\alpha-1|=1$ ή $|\alpha-1|=-3$, που είναι αδύνατη

$|\alpha-1|=1\Leftrightarrow\alpha-1=1$ ή $\alpha-1=-1\Leftrightarrow\alpha=2$ ή $\alpha=0$

ii. Η εξίσωση της ε_2 είναι η $y=3x+6$ και

- αν $x=0\Leftrightarrow y=6$, δηλαδή τέμνει τον y΄y στο A(0,6)
- αν $y=0\Leftrightarrow x=-2$, δηλαδή τέμνει τον x΄x στο B(-2,0)



Οπότε, $E_{(OAB)}=\frac{1}{2}(OB)(OA)$

$E_{(OAB)}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6=6$ τ.μ.

10. **Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2y=(\lambda-1)x+\lambda$, $\varepsilon_2: \frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{3}=1$**

Βρείτε:

i. Τους συντελεστές διεύθυνσης των ε_1, ε_2 .

ii. Το λ ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

iii. Το λ ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

iv. Το λ ώστε $\varepsilon_1 \parallel x'x$.

v. Το λ ώστε η ε_1 να περνάει από την αρχή των αξόνων.

vi. Το μ αν το σημείο $M\left(2\mu-3, -\frac{7}{5}\right)$ ανήκει στην ε_2.

vii. Τα σημεία που η ε_2 τέμνει τους άξονες.

viii. Το κοινό σημείο των ε_1, ε_2 όταν τέμνονται κάθετα.

Λύση:

i. • Η εξίσωση της ε_1 γράφεται $y=\frac{\lambda-1}{2}x+\frac{\lambda}{2}$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\alpha_1=\frac{\lambda-1}{2}$$

• Η εξίσωση της ε_2 γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{3}=1 \Leftrightarrow 3(x-y)-2(x+y)=6 \Leftrightarrow 3x-3y-2x-2y=6 \Leftrightarrow$$

$$-5y=-x+6 \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}$$

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2=\frac{1}{5}$.

ii. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{2}\cdot\frac{1}{5}=-1 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{10}=-1 \Leftrightarrow \lambda-1=-10 \Leftrightarrow \lambda=-9$

iii. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5\lambda-5=2 \Leftrightarrow 5\lambda=7 \Leftrightarrow \lambda=\frac{7}{5}$

iv. $\varepsilon_1 \parallel x'x \Leftrightarrow \alpha_1=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{2}=0 \Leftrightarrow \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

v. Η ε_1 περνάει από το O(0,0) άρα $0=\frac{\lambda-1}{2}\cdot 0+\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

vi. Το $M\left(2\mu-3,\frac{-7}{5}\right)\in\varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{7}{5}=\frac{1}{5}(2\mu-3)-\frac{6}{5}\Leftrightarrow$

$-7=2\mu-3-6\Leftrightarrow 2\mu=2\Leftrightarrow \mu=1$

vii. • Αν $x=0\Leftrightarrow y=-\frac{6}{5}$ η ε_2 τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0,-\frac{6}{5}\right)$

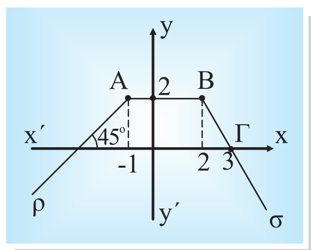
• Αν $y=0\Leftrightarrow x=6$ η ε_2 τέμνει τον $x'x$ στο $B(6,0)$

viii. Οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται κάθετα όταν $\lambda=-9$ άρα η ε_2 γράφεται $y=-5x-\frac{9}{2}$ οπότε λύνουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}=-5x-\frac{9}{2}$$
$$2x-12=-50x-45$$
$$52x=-33$$
$$x=-\frac{33}{52}$$

Τότε $y=\frac{-69}{52}$, άρα $K\left(-\frac{33}{52},\frac{-69}{52}\right)$ το κοινό τους σημείο.

11. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης με την διπλανή γραφική παράσταση.



Λύση:

1. Έστω $\boxed{y=\alpha x+\beta \quad \text{με} \quad x\le -1}$ η εξίσωση της ημιευθείας A_ρ

• $\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$

• το $A(-1,2)$ ανήκει στην A_ρ οπότε $2=-\alpha+\beta\Leftrightarrow\beta=3$ άρα η εξίσωση της A_ρ είναι $y=x+3$ με $x\le -1$.

2. Το τμήμα ΑΒ έχει εξίσωση $\boxed{y=2, \quad \text{με} \quad -1\le x\le 2}$

3. Έστω $\boxed{y=\alpha x+\beta \quad \text{με} \quad x\ge 2}$ η εξίσωση της ημιευθείας B_σ

• το $B(2,2)\in B_\sigma \Leftrightarrow 2=2\alpha+\beta$

• το $\Gamma(3,0)\in B_\sigma \Leftrightarrow 0=3\alpha+\beta$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases}2\alpha+\beta=2\\3\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha-\beta=-2\\3\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=2-2\alpha=6\end{cases}$

Άρα $y=-2x+6$, με $x\geq 2$

Οπότε $y=f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{αν} \quad x\leq -1 \\ 2, & \text{αν} \quad -1\leq x\leq 2 \\ -2x+6, & \text{αν} \quad x\geq 2 \end{cases}$ η ζητούμενη συνάρτηση.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με: $y=f(x)=\begin{cases} \alpha x+32, & \text{αν} \quad x<-2 \\ \beta x^2, & \text{αν} \quad -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{\gamma}{x}, & \text{αν} \quad x>2 \end{cases}$

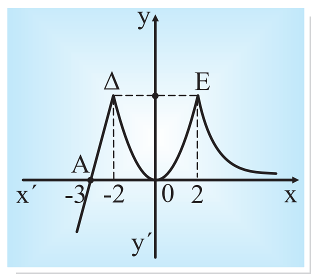
Αν τα σημεία Α(–3,0), Β(1,1) και Γ(4,2) ανήκουν στην γραφική παράσταση της f βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και μετά παραστήστε την γραφικά.

Λύση:

• Το $A(-3,0)\in C_f \Leftrightarrow f(-3)=0 \Leftrightarrow -3\alpha+12=0 \Leftrightarrow \alpha=4$

Το $B(1,1)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=1 \Leftrightarrow \beta=1$

Το $\Gamma(4,2)\in C_f \Leftrightarrow f(4)=2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{4}=2 \Leftrightarrow \gamma=8$



Άρα $f(x)=\begin{cases} 4x+12, & \text{αν} \quad x<-2 \\ x^2, & \text{αν} \quad -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{8}{x}, & \text{αν} \quad x>2 \end{cases}$

• Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από:

(Ι) την ημιευθεία με εξίσωση $\boxed{y=4x+12, \text{ με } \quad x<-2}$ στην οποία δεν ανήκει η αρχή της $\Delta(-2,4)$ ενώ περνάει από το σημείο $A(-3,0)$

(ΙΙ) το τόξο της παραβολής με εξίσωση $\boxed{y=x^2 \quad \text{αν} \quad -2\leq x\leq 2}$ που έχει άκρα τα σημεία $\Delta(-2,4)$ και $E(2,4)$.

(ΙΙΙ) το τόξο της υπερβολής με εξίσωση $\boxed{y=\dfrac{8}{x}, \text{ με } \quad x>2}$ που έχει άκρο το σημείο Ε(2,4) το οποίο βέβαια δεν ανήκει στο τόξο.

1. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}$ με $x\in\mathbb{R}$**

i. Βρείτε τον τύπο της f χωρίς "απόλυτα"

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

2. Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^3+x-6}{x^2+x+1}$ και η ευθεία $(\varepsilon):\ y=2x-3$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Βρείτε τα κοινά σημεία της (ε) και της γραφικής παράστασης της f έστω C_f

iii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που τέμνει κάθετα την (ε) στο κοινό σημείο της με την C_f το οποίο έχει την μεγαλύτερη τετμημένη.

Λύση:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(–2,–3) και Γ(λ–1, 5)

i. Βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ αν τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ii. Βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x το οποίο να ισαπέχει από τα Α, Γ.

Λύση:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(x) = |x + 1| + |x|$

Λύση:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

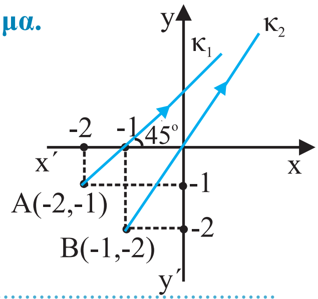
....

5. Ένα κινητό $κ_1$ ξεκινά απ'το σημείο Α(-2,-1) ενώ ένα άλλο κινητό $κ_2$ απ'το σημείο Β(-1,-2) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε την απόσταση των $κ_1$, $κ_2$ προτού ξεκινήσουν.

β) Τις εξισώσεις των τροχιών των $κ_1$, $κ_2$

γ) Σε ποιο σημείο διασταυρώνονται οι τροχιές των κινητών $κ_1$, $κ_2$;



Λύση:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. **Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση:** $f(x) = (|\lambda| - 2) \cdot x^2$

Λύση:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1.Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ iii) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-|x-1|}}$

ΘΕΜΑ 2ο

Β.1. Να βρείτε το συμμετρικό του Α(1, 3)

i) ως προς τον άξονα x΄x

ii) ως προς τον άξονα y΄y

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε οι ευθείες:

i) $\varepsilon_1 : y = |\lambda - 1| x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = 2x + 3$ να είναι παράλληλες

ii) $\varepsilon_3 : y = \lambda x + 3$ και $\varepsilon_4 : y = (\lambda - 2)x + 7$ να είναι κάθετες

....

....

....

....

....

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda - 1$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε:

i) η ε να διέρχεται απ'την αρχή των αξόνων

ii) η ε να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

iii) η ε να είναι κάθετη στην ε_1: y - x = 2002.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....