ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων): Αν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ k\in R$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu},\ \nu\in N \text{ με } \nu\geq 2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \text{ με } f(x)\geq 0 \text{ κοντά στο } x_0,\ \nu\in N \text{ με } \nu\geq 2.$$

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $\nu\in N^*$	Αν ν άρτιος : $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=+\infty$ Αν ν περιττός : $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=-\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x , όπου $\nu\in N^*$	$\lim_{x\to+\infty} x^{-\nu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$, $\lim_{x\to-\infty} x^{-\nu}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha>0$	$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}=0$
Εκθετικά όρια	Αν $\alpha>1$: $\lim_{x\to+\infty}\alpha^{x}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty}\alpha^{x}=0$ Αν $0<\alpha<1$: $\lim_{x\to+\infty}\alpha^{x}=0$ $\lim_{x\to-\infty}\alpha^{x}=+\infty$
Λογαριθμικά όρια	Αν $\alpha>1$: $\lim_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\log_{\alpha}x=-\infty$ Αν $0<\alpha<1$: $\lim_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\log_{\alpha}x=+\infty$

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της , αν και μόνον αν, ισχύει : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της) , αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της .

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις ημx , συνx είναι συνεχείς στο R.
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , lnx , logx είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και οι συναρτήσεις: $f+g,\ f \cdot g,\ \lambda \cdot f\ (\lambda \in R),\ \dfrac{f}{g}\left(g(x) \neq 0\right),\ |f|,\ \sqrt[k]{f}\ \left(f(x) \geq 0\right)$, $\kappa \in N$ με $\kappa \geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

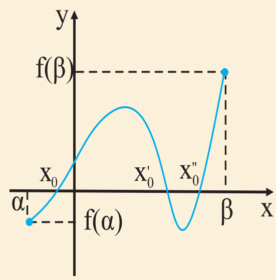
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Αν: • η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).



Γεωμετρική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των α και β (σχ.1).

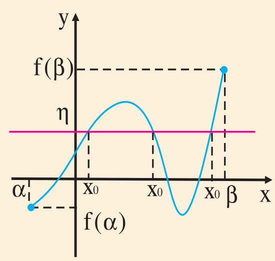
Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν ισχύουν ότι:

• η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α), f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = n$.



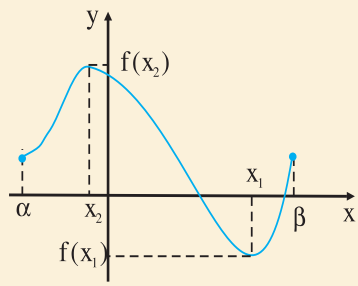
Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία $y=n$ όπου n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε η f παίρνει στο [α,β] μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ οπότε:

$m=f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)=M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.



Ευρεση συνόλου τιμών

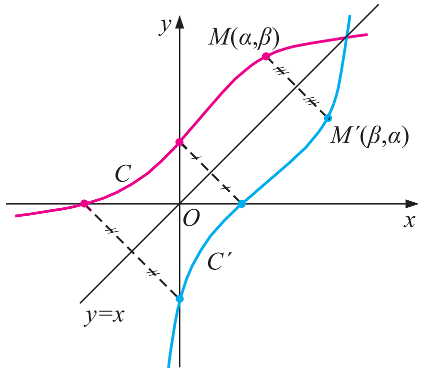
- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha,\ \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α,β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν τέλος, η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι: $f(A)=\left[f(\alpha),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ή $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ f(\beta)\right]$.

  Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$ ή $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Δικαιολογήστε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε μια 1–1 συνάρτηση f και ας υποθέσουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.



Επειδή $\quad f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$**.**

Αν:

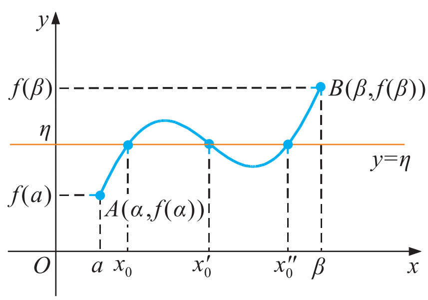
- **η *f* είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **και**
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ **και** $f(\beta)$ **υπάρχει ένας, τουλάχιστον** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιος, ώστε**

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (βλ. σχήμα).



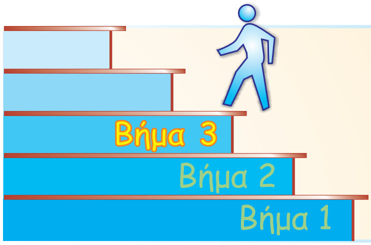
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

Λύση:

Για κάθε $x\neq 0$:

$$\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\frac{\left(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2+1}{\sqrt{x^4+1}+x^2+1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^4+1}\right)^2-(x^2+1)^2}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{x^4+1-x^4-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}$$

Άρα: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

2. **Θεωρούμε συνάρτηση** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+2\alpha x)}{x^2}$.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\beta$.

Λύση:

Η f(x) ορίζεται για $x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+2\alpha x)}{x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+(1+2\alpha x)}{\sqrt{1+x}+(1+2\alpha x)}=$

$$=\frac{1+x-(1+2\alpha x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}=\frac{1+x-1-4\alpha x-4\alpha^2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}=$$

$$=\frac{x\left(1-4\alpha-4\alpha^2x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}.$$ Δηλαδή: $$f(x)=\frac{1-4\alpha-4\alpha^2x}{x\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}\quad(1)$$

Άρα: $xf(x)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)=-4\alpha^2x+1-4\alpha$

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0}\left[xf(x)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[-4\alpha^2x+1-4\alpha\right]$

ή $0\cdot\beta\cdot 2=0+1-4\alpha\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{4}$

Από τη σχέση (1), για $\alpha=\dfrac{1}{4}$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{4}x}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}$

Άρα: $\beta=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{-1}{8}$.

3. **Έστω** $z\in C, z\neq 0$ **και** $f:R\to R$ **συνεχής συνάρτηση. Αν τα επόμενα όρια:**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|zf(x)-4|-4}{x}$ **και** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|zf(x)+2|-2}{x-2}$, **υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχει** $\xi\in[0,2]$ **τέτοιο ώστε** $f(\xi)=0$.

Λύση:

Έστω $g(x)=\dfrac{|zf(x)-4|-4}{x}$ (1)

Σύμφωνα με την εκφώνηση το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση $|zf(x)-4|$ είναι επίσης συνεχής ,αφού $|zf(x)-4|=\sqrt{(xf(x)-4)^2+y^2f^2(x)}$ όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$.

Από την (1) παίρνουμε: $|zf(x)-4|=xg(x)+4$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}|zf(x)-4|=\lim_{x\to 0}(xg(x)+4)=4$$

Άρα $|zf(0)-4|=4$ (2), αφού η $|zf(x)-4|$ είναι συνεχής στο 0.

Αν $z=\alpha+\beta i$ η σχέση (2) γράφεται:

$$\sqrt{(\alpha f(0)-4)^2+f(0)^2\beta^2}=4\Leftrightarrow f(0)\left[\alpha^2 f(0)-8\alpha+f(0)\beta^2\right]=0$$

Τότε ($f(0)=0$, άρα $\xi=0$) ή $\alpha^2 f(0)-8\alpha+f(0)\beta^2=0$ οπότε: $f(0)=\dfrac{8\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ (3)

4. **Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.**

Λύση:

Για κάθε $x\in R$, $|f(x)|=\dfrac{|x^2|}{f^2(x)+1}\le x^2$ (αφού $f^2(x)+1\ge 1$, για κάθε $x\in R$)

δηλαδή για κάθε $x\in R$, $-x^2\le f(x)\le x^2$.

Όμως: $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ (1)

Επίσης από την σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $f(0)=\dfrac{0^2}{f^2(0)+1}=0$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

5. **Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $|\alpha|<1$ συνεχής και τέτοια ώστε:**

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)+2=2\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta): f(x_0)={x_0}^2$

Λύση:

Η σχέση της υπόθεσης γίνεται:

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)+2=2f(\alpha)-2f(\beta)\Leftrightarrow f^2(\alpha)+f^2(\beta)+1+1-2f(\alpha)+2f(\beta)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\big(f(\alpha)-1\big)^2+\big(f(\beta)+1\big)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)=1\\ \quad\text{και}\\ f(\beta)=-1\end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2, x\in[\alpha,\beta]$

Για την g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha^2=1-\alpha^2>0$, αφού $|\alpha|<1$
- $g(\beta)=f(\beta)-\beta^2=-1-\beta^2=-(\beta^2+1)<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta): g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-{x_0}^2=0\Leftrightarrow f(x_0)={x_0}^2$

6. **Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)>1$ ώστε:**

$$f^2(x)-2f(x)=x^2, \text{ για κάθε } x\in R.$$

Λύση:

Για κάθε $x\in R$: $f^2(x)-2f(x)=x^2\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^2+1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\big(f(x)-1\big)^2=x^2+1\neq 0 \quad (1)$$

Επομένως και $f(x)-1\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-1,\ x\in R$:

Για τη g παρατηρούμε ότι:
- g συνεχής στο R
- $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $g(0)=f(0)-1\overset{\text{υποθ.}}{>}0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in R$ δηλ. $f(x)-1>0$, για κάθε $x\in R$.

Οπότε λόγω και της (1) έπεται ότι: $f(x)-1=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in R$ ή ισοδύναμα $f(x)=\sqrt{x^2+1}+1$, για κάθε $x\in R$.

7. **Έστω $f:R\to R$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0)>0$ και $f(x)\neq x^2$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι:** **i.** $f(x)>x^2$**,για κάθε** $x\in R$. **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Λύση:

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in R$. Για τη g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο R,
- $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $g(0)=f(0)\overset{\text{υποθ.}}{>}0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in R$, δηλαδή $f(x)-x^2>0$, για κάθε $x\in R$ ή $f(x)>x^2$, για κάθε $x\in R$

ii. Είναι φανερό ότι: για κάθε $x\in R$, $f(x)>x^2\geq 0$ και άρα $0<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{x^2}$, για κάθε $x\in R^*$. Όμως: $\lim\limits_{x\to-\infty} 0=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ και επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty$ (αφού $\dfrac{1}{f(x)}>0$, για κάθε $x\in R$)

δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

8. **Έστω $f:R\to R$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $x<f(x)<x+1$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι:** $f(R)=R$.

Λύση:

Αρκεί προφανώς να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός κ είναι τιμή της f.

Δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in R : f(x_0) = \kappa$

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa$, $x \in R$ για την οποία παρατηρούμε ότι: • g συνεχής στο $[\kappa - 1, \kappa] \subset R$

• $g(\kappa - 1) = f(\kappa - 1) - \kappa \overset{\text{υποθ.}}{<} \kappa - 1 + 1 - \kappa = 0$

• $g(\kappa) = f(\kappa) - \kappa \overset{\text{υποθ.}}{>} 0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

υπάρχει $x_0 \in (\kappa - 1, \kappa) \subset R : g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \kappa = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \kappa$ ο.ε.δ.

9. **Αν για τη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει $f(0) = 0$ και $\dfrac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0$, για κάθε $x \in R^*$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.**

Λύση:

Από τη σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $(f(x) - x)(f(x) + x) < 0$, για κάθε $x \in R^*$

ή $f^2(x) - x^2 < 0$ για κάθε $x \in R^*$, δηλ. $f^2(x) < x^2$ για κάθε $x \in R^*$.

Οπότε $\sqrt{f^2(x)} < \sqrt{x^2}$, για κάθε $x \in R^*$. Άρα $|f(x)| < |x|$, για κάθε $x \in R^*$

ή ισοδύναμα $-|x| < f(x) < |x|$, για κάθε $x \in R^*$.

Όμως: - $\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0}|x| = 0$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (1)

Όμως εξ' υποθέσεως είναι $f(0) = 0$ (2)

Εκ των (1) και (2) έπεται ότι η f είναι συνεχής στο 0.

10. **Έστω $f : [\alpha, \beta] \to R$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x^2 + 1} \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.**

Λύση:

Η f ως συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] θα παίρνει μέγιστη τιμή σ' αυτό (θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής). Δηλαδή θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ή ισοδύναμα $f(x)-f(x_0) \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Οπότε $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x^2+1} \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

11. Έστω $f: R \to R$ συνάρτηση "1–1" και τέτοια ώστε $f(2)<f(1)<f(3)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Λύση:

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι συνεχής στο R. Από τις υποθέσεις του προβλήματος έπεται ότι:

- f συνεχής στο $[2,3] \subset R$
- $f(2) \ne f(3)$
- $f(1) \in (f(2), f(3))$

Αρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει

$$x_0 \in (2,3): f(x_0) = f(1) \overset{f\text{ "1–1"}}{\Leftrightarrow} x_0 = 1, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο R.

12. Έστω f συνεχής στο R και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{f(x+2)+f(x)=0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in R,\ f(0) \ne f(1)}$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(\xi+1)$.

Λύση:

θεωρούμε $g(x)=f(x)-f(x+1)$, που είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύουν:

$g(0)=f(0)-f(1)$ και $g(2)=f(2)-f(3)$. Όμως για $x=0$ από την (1) έχουμε :

$f(2)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(2)=-f(0)$. Για $x = 1$ έχουμε από την (1):

$$f(3)+f(1)=0 \Leftrightarrow f(3)=-f(1)$$

Άρα $g(2)=-f(0)+f(1)=-(f(0)-f(1))$ και $g(0)\cdot g(2)=-(f(0)-f(1))^2<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ξ στο (0,2) τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)-f(\xi+1)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(\xi+1)$$

13. Αν f συνεχής στο $[0,4]$, τότε υπάρχει:

$$\xi \in (0,4): 9f(\xi) = 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

Λύση:

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο δηλ. υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu \in [0,4]$ τέτοια ώστε: $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu)$, $x \in [0,4]$

Άρα: $\begin{cases} f(x_\varepsilon) \le f(1) \le f(x_\mu) \\ f(x_\varepsilon) \le f(2) \le f(x_\mu) \\ f(x_\varepsilon) \le f(3) \le f(x_\mu) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x_\varepsilon) \le 2f(1) \le 2f(x_\mu) \\ 3f(x_\varepsilon) \le 3f(2) \le 3f(x_\mu) \\ 4f(x_\varepsilon) \le 4f(3) \le 4f(x_\mu) \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$9f(x_\varepsilon) \le 2f(1) + 3f(2) + 4f(3) \le 9f(x_\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_\varepsilon) \le \frac{2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{9} \le f(x_\mu)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi) = 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

14. Αν $f: R \to R$ και για κάθε $x_1, x_2 \in R$ είναι $|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_1 - x_2)^2$ να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3}$.

Λύση:

Με $x_1 = x,\ x_2 = x_0$ έχουμε:

$|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0|^2 \Leftrightarrow -|x - x_0|^2 \le f(x) - f(x_0) \le |x - x_0|^2$ και επειδή

$\lim\limits_{x \to x_0} \left[-|x - x_0|^2\right] = \lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^2 = 0$, συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Επειδή το x_0 είναι τυχαίο στοιχείο του R η f συνεχής σε κάθε $x \in R$. Ομοίως με $x_1 = x,\ x_2 = -3$ έχουμε:

$$|f(x)-f(-3)| \le |x+3|^2 \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right| \le |x+3|$$

$\Leftrightarrow -|x+3| \le \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} \le |x+3|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-3}[-|x+3|] = \lim\limits_{x\to-3}|x+3| = 0$ συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = 0$.

15. Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε : $2f^3(x)+f(x)=kx,\ k>0$

α. Να δειχθεί ότι η f είναι “1–1”.

β. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Λύση:

α. Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Επομένως: $\begin{cases} 2f^3(x_1)=2f^3(x_2) \\ f(x_1)=f(x_2) \end{cases}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2f^3(x_1)+f(x_1)=2f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow kx_1=kx_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

που σημαίνει ότι η f είναι 1 - 1.

β. Απο τις σχέσεις: $2f^3(x)+f(x)=kx$ και $2f^3(x_0)+f(x_0)=kx_0$ με αφαίρεση κατά μέλη,παίρνουμε: $2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+\left[f(x)-f(x_0)\right]=k(x-x_0)$

$$\Leftrightarrow 2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+\left[f(x)-f(x_0)\right]=k(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)-f(x_0)\right]\left[2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1\right]=k(x-x_0) \quad (1)$$

αλλά $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)>0$ (τριώνυμο ως προς το f(x) με αρνητική διακρίνουσα). Οπότε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{k(x-x_0)}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}$$

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{k(x-x_0)}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}\right| \le \frac{k|x-x_0|}{1}=k|x-x_0| \Leftrightarrow$$

$$-k|x-x_0| \le f(x)-f(x_0) \le k|x-x_0|$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-k\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[k\left|x-x_0\right|\right]=0$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 θα είναι συνεχής στο R.

Απο τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{k}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1} \qquad (2)$$

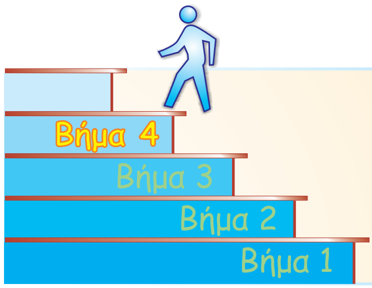
Επειδή η f είναι συνεχής στο R άρα και στο x_0 το 2ο μέλος της (2) μας δίνει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{k}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}=$$

$$=\frac{k}{2f^2(x_0)+2f(x_0)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}=\frac{k}{6f^2(x_0)+1}$$

Άρα από (2) έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{k}{6f^2(x_0)+1}$ (για $x_0=2$ έχουμε:)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{k}{6f^2(2)+1}$$



Λύνουμε μόνοι μας

1. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=5,\ \lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(2x^2+x-10)\right]=3$, να βρεθεί το :

$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x+2\beta, & x\le 1\\ x^2+\beta x+2\alpha, & x>1\end{cases}$.Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και η γραφική παράσταση της f περνά απο το σημείο Α(2,2) να βρεθούν οι τιμές των α και β.

3. Αν $f(x)=\frac{\alpha|x+2|+\beta|x-4|-2}{x^2-5x+6}$ και $\lim_{x\to 3} f(x)=10$ να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+x+4}$

β. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+6}-4x$

γ. $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{16x^2+x+3}+\sqrt{2x^2+3x+5}+7x+8\right]$

δ. $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x-2}+4x\right]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:**

1. $f(x)=x^4\eta\mu\dfrac{1}{x^4}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

2. $f(x)=x^5\eta\mu\dfrac{1}{x^3}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

3. $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^6}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

....

....

....

....

....

....

....

....

6. **Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων:**

1. $f(x)=\dfrac{3^x+5\cdot 2^{x+1}+7^x}{4^x-2\cdot 3^x+6\cdot e^x}$, όταν $x\to+\infty$

2. $f(x)=\dfrac{5^{x+2}-3\cdot 4^x+2^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}{3^x-4\cdot 2^x+6\dfrac{1}{2^x}}$, όταν $x\to-\infty$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. **Να προσδιοριστούν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in R$ ώστε:**

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\sqrt{9x^2+3x+4}+\alpha x+\beta\right]=\frac{1}{3}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

8. **Να προσδιοριτεί ο α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-x+5}+\alpha x$ να έχει όριο καθώς $x \to -\infty$ και να βρεθεί η τιμή του ορίου.**

....

....

....

....

....

....

....

9. **Έστω $\alpha \in R$, $f: R \to R$ με:**

α. $(f \circ f)(x)=4x+3$ **και** **β.** $(f \circ f \circ f)(x)=8x+\alpha$ **για κάθε $x \in R$.**
Βρείτε το $\alpha \in R$ και τη συνάρτηση f.

....

....

....

....

....
....
....
....
....

10. Έστω $f : R \to R$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$: $f^3(x) + 3f(x) = 2x + 2003$

Δείξτε ότι:

α. η f είναι "1-1", **β.** υπάρχει η f^{-1} την οποία να βρείτε.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$. Δείξτε ότι:

α. Αν f, g είναι "1-1" τότε η gof είναι "1-1"

β. Αν f, g είναι αντιστρέψιμες τότε η gof είναι αντιστρέψιμη και

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

....
....
....
....
....
....

....

....

12. **Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι:**

α. **$f(1)=1$**

β. **η συνάρτηση $g(x)=1+x(1-f(x))$ δεν είναι “1-1”**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. **Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα στο R, τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x)=x$.**

....

....

....

....

....

....

....

....

14. **Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=1$ να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:**

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2xf(x)+x}{2x+xf(x)}$

....

....

....

....

....

....

....

....

15. **Βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ έτσι ώστε:** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\alpha x^3+\beta x^2+2x+3}{|x-1|}=\gamma$

....

....

....

....

....

....

....

16. **Να βρεθεί το πολυώνυμο P(x) και το $\alpha\in R$ αν:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$ **και** $f(0)=1$

όπου $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x-1}{P(x)}$.

....

....

....

....

....

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x+\beta$ βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$

έτσι ώστε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ και για κάθε $x\in R$

$(x-1)f(x)\geq \eta\mu(x-1)$

α. Βρείτε το f(1).

β. Αν $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-\alpha+\alpha x}\ \sqrt{1\text{-}\beta\text{+}\beta x}\ \text{-}f(1)}{x-1}$, $\alpha,\beta\in R$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

19. Έστω $f: R \to R$ συνεχής στο $x_0 = 2$. Αν $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 2003$

α. Βρείτε το f(2). **β.** Βρείτε το $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

20. Δίνονται $f, g: [\alpha, \beta] \to R$ συνεχείς, με $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta])$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $(gof)(\xi_1) - (fog)(\xi_2) = \xi_1 - \xi_2$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + (\alpha^2 - \alpha)x - \alpha^2$ με $0 < \alpha \neq 1$, $A_f = R$

α. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

β. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια μονότονη.

γ. Λύστε την εξίσωση $\alpha^x + (\alpha^2 - \alpha)x = \alpha^2$.

δ. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

22. **Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\alpha^x$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$ με $0<\alpha<1$.**

α. **Μελετήστε τις f, g ως προς τη μονοτονία.**
β. **Δείξτε ότι οι C_f, C_g έχουν μοναδικό σημείο τομής.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

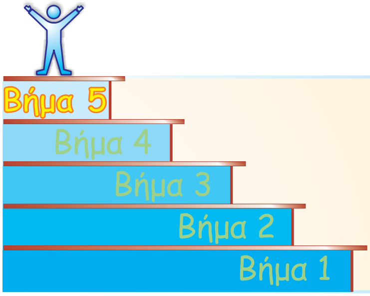
23. **Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ τα οποία είναι σημεία τομής της C_f με την διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:**

$$\frac{f(\xi)-\beta}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi)-\alpha}{\xi-\beta}$$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

24. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

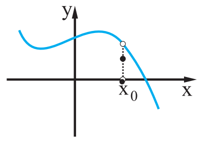
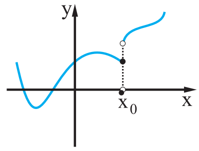
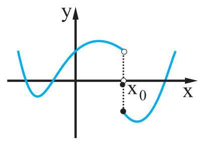
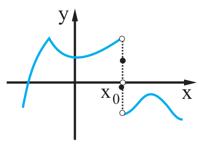
Α.α. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = n$

(Μονάδες 4)

β. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{1}{x}$ όταν $x \in (0,1)$

(Μονάδες 2)

Β1. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό ώστε καθένα από τα σχήματα της πρώτης στήλης να ταιριάξει με τις κατάλληλες σχέσεις της δεύτερης στήλης.

Στήλη Α		Στήλη Β
Α.		**1.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
Β.		**2.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
Γ.		**3.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
Δ.		**4.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

(Μονάδες 10)

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν για μια συνεχή συνάρτηση στο (α,β) ισχύουν:

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \beta^-} f(x) = +\infty,$$

τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

(Μονάδες 3)

β. Αν η f είναι συνεχής στο [-1,2] και f(-1)=2, f(2)=5, τότε υπάρχει πραγματικός $x_0 \in (-1,2)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \pi$.

(Μονάδες 3)

γ. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = +\infty$, τότε το πεδίο τιμών της f είναι το $(-\infty,+\infty)$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2ο

Α. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοιες ώστε $f(\alpha)<g(\alpha)$, $f(\beta)>g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες με εξισώσεις $y=f(x)$, $y=g(x)$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$

(Μονάδες 15)

Β. Σε ποιό από τα παρακάτω διαστήματα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει σίγουρα λύση της εξίσωσης $x^3=x+1$

Α. $(-2,-1)$ **Β.** $(1,\ 2)$ **Γ.** $(-1,0)$

Δ. $(0,1)$ **Ε.** $(2,3)$

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

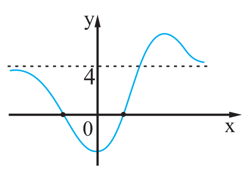
....

Θέμα 3ο

Α. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+\alpha x}-\beta x\right)=1$

(Μονάδες 15)

Β. Με βάση το διπλανό σχήμα το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{f(x)}$ είναι ίσο με:



Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** $\dfrac{1}{2}$

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

Το ποσοστό επί τοις εκατό του τιμάριθμου μιας χώρας μετά από t χρόνια, δίνεται από τον τύπο: $f(t)=\frac{t+45}{t+5}$, $t \geq 0$.

α. Πόσο είναι σήμερα ο τιμάριθμος;

β. Να εξετάσετε αν στο μέλλον ο τιμάριθμος θα αυξηθεί ή θα μειωθεί.

γ. Ποιός θα είναι ο τιμάριθμος μετά από “πάρα πολλά” χρόνια αν το ποσοστό επί τοις εκατό συνεχίζει να εκφράζεται από τον παραπάνω τύπο;

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....